École universitaire Paris-Saclay
Licence de mathématiques 1ère année

Année 2022-2023
Semestre 2

# MEU152 – examen partiel du Lundi 14 mars 2023

*Durée : 2h00.*

*La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir* encadrer *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

**Exercice 1** (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration*** *(pas simplement de citer le cours), et on demande de justifier la troisième question.*

(1) Soit $E$ un espace vectoriel, et $v_1, \dots, v_n \in E$. Démontrer que si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de $E$, alors toute famille de $E$ contenant $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.

(2) Démontrer que si $E$ est un espace vectoriel, et si $F, G \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

(3) Montrer que l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Solution de l'Exercice 1.** (1) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille génératrice de $E$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $E$ qui contient $(v_1, \dots, v_n)$. Sans perte de généralité (quitte à réordonner les termes de $\mathcal{F}$), on peut supposer que $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_m)$, avec $m \geq n$. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $v \in E$. Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice de $E$, on peut écrire

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

En particulier,

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0 v_{n+1} + \dots + 0 v_m,$$

donc $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$, donc $\mathcal{F}$ engendre $E$.

(2) Soit $F, G \subset E$ comme dans l'énoncé. Comme $F$ est un SEV de $E$, $0 \in F$. De même, $0 \in G$ car $G$ est un SEV de $E$, donc $0 \in F \cap G$.

Soit $u, v \in F \cap G$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme $u, v \in F \cap G$, on a $u, v \in F$. Comme $F$ est un SEV, $\lambda u + \mu v \in F$. De même, $u, v \in G$ et comme $G$ est un SEV, $\lambda u + \mu v \in G$. Donc $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un SEV de $E$.

(3) Notons $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Alors $(1, 0, 0) \in D$. Mais $2(1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin D$ puisque $2^2 + 0^2 + 0^2 = 4 > 1$. Donc $D$ n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 2.** Soit $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

(1) Montrer que $E$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base de $E$. Que vaut $\dim E$ ?

(3) La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est elle libre ? Est-ce que $u_3$ est dans $F$ ?

(4) Est-ce que $u_3$ est dans $E$ ?

(5) Donner une base de $E \cap F$.

(6) Donner un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Solution de l'Exercice 2.** (1) Déjà, $(0, 0, 0) \in E$ puisque $0 + 0 = 0$. Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in E$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'),$$

et on calcule :

$$(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(\underbrace{y + z}_{=0}) + \mu(\underbrace{y' + z'}_{=0}) = 0,$$

puisque $u, v \in E$. Donc $E$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

(2) $u = (x, y, z) \in E$ si, et seulement si $y + z = 0$ i.e. $y = -z$, donc si, et seulement si, $u = (x, -z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, -1, 1)$. Une base de $E$ est donc $(1, 0, 0), (0, -1, 1))$, et $\dim E = 2$.

(3) On regarde le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, qui s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -4\lambda_2 & = & 0 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -4\lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Il y a 3 pivots, la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.

(4) On calcule pour $u_3$ : $y + z = 1 + -1 = 0$, donc $u_3 \in E$.

(5) On a une base de $E$ donnée par $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -1, 1)$, et une base de $F$ donnée par $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -2, -1)$. On cherche donc un élément $v$ dans l'intersection sous la forme $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 v_1 + \ \mu_2 v_2$, et on a donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 - \mu_1 v_1 - \ \mu_2 v_2 = 0$, que l'on peut réécrire

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 & = & 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 & = & 0 \\ -4\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 & = & 0 \\ -3\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 & = & 0 \\ -4\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 & = & 0 \\ \mu_1 - 7\mu_2 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow 4L_3 - 3L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 3\mu_2 \\ \lambda_2 & = & 2\mu_2 \\ \mu_1 & = & 7\mu_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & -\mu_2 \\ \lambda_2 & = & 4\mu_2 \\ \mu_1 & = & 7\mu_2 \end{array}\right.$$

Donc $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ est dans $E \cap F$ ssi il existe $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que $v = 3\mu_2 u_1 + 2\mu_2 u_2 = \mu_2((3, 3, 3) + (4, -4, -2)) = \mu_2(7, -1, 1)$. Donc une base de $E \cap F$ est $(7, -1, 1)$.

(6) $F$ est de dimension 2, car $(u_1, u_2)$ est libre puisque $(u_1, u_2, u_3)$ était libre, et donc $(u_1, u_2)$ est une base de $F$. Donc un supplementaire de $F$ a dimension 1. Le SEV $\mathrm{Vect}(u_3)$ est de dimension 1, il est en somme directe avec $F$ puisque $u_3 \notin F$, et $(u_1, u_2, u_3)$ étant libre, formée de 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathrm{Vect}(u_3)$ est un supplémentaire de $F$, i.e. $F \oplus \mathrm{Vect}(u_3) = \ \mathbb{R}^3$.

**Exercice 3.** Soit $E$ le sev de $\mathbb{R}^4$ donné par $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ |x_1 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_4 = 0\}$. Soit $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 0, 1, 0)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(1) Donner une base de $E$ et sa dimension.

(2) Donner une base de $F$ et sa dimension.

(3) Donner un système d'équations cartésiennes de $F$.

(4) Donner une famille génératrice de $E + F$.

(5) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

**Solution de l'Exercice 3.** (1) On réécrit le système d'équations de $E$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_4 \end{array}\right.$$

On a donc que $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ ssi $v = (-x_3, -x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$. Une base de $E$ est donc $((-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$, et $\dim E = 2$.

(2) $(u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de $F$, pour savoir si elle est libre, et eventuellement en extraire une base de $F$, on résout le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ qui se réécrit,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_2-\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

On a donc deux pivots ($\lambda_1$ et $\lambda_2$), donc $(u_1,u_2,u_3)$ n'est pas libre, et $(u_1,u_2)$ forment une base de $F$, et $\dim F = 2$.

(3) On reprends le système précédent : $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ est dans $F$ si, et seulement si, il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(x,y,z,t)$. Ce système se réécrit,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x \\ \lambda_1-\lambda_2 &= y \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= z \\ \lambda_1-\lambda_2 &= t \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x \\ \lambda_1-\lambda_2 &= y \\ 0 &= z-x \\ 0 &= t-y \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x \\ -2\lambda_2-\lambda_3 &= y-x \\ 0 &= z-x \\ 0 &= t-y \end{cases}$$

Le système est echelonné, il a des solutions ssi $z-x=0$ et $t-y=0$. Un système d'équations cartésiennes de $F$ est donc

$$\begin{cases} z-x &= 0 \\ t-y &= 0. \end{cases}$$

Remarque : Au lieu de faire 2 fois le système dans les questions 1 et 2, on aurait pu écrire le système avec $x,y,z,t$ d'abord, l'échelonner, puis répondre en même temps à la question 1 et 2, puisque les pivots ne change pas suivant si le système est homogène ou non.

(4) $((-1,0,1,0),(0,-1,0,1))$ est génératrice de $E$ (c'est une base). Notons ces vecteurs $w_1,w_2$. $(u_1,u_2)$ est génératrice de $F$ (c'est une base), donc $(w_1,w_2,u_1,u_2)$ est génératrice de $E+F$.

(5) On a $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ ssi la famille précédente est une base. On regarde donc le système $\lambda_1w_1+\lambda_2w_2+\lambda_3u_1+\lambda_4u_2=0$ ; qui se réécrit

$$\begin{cases} -\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+L_1\\ L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 &= 0 \\ 0 &= z-x \\ 2\lambda_3+2\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_3-2\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x \\ -2\lambda_2-\lambda_3 &= y-x \\ 2\lambda_3+2\lambda_4 &= 0 \\ -4\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

Le système est echelonné, et a 4 pivots, la famille $(w_1,w_2,u_1,u_2)$ est donc libre, elle a $4 = \dim\mathbb{R}^4$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$, et donc $E$ et $F$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 4.** On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 2.

(1) Justifier rapidement pourquoi $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, et donner sa base canonique et sa dimension.

(2) Montrer que les polynômes $P_1 := 1$, $P_2 := X-1$, $P_3 := (X-1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Déterminer les coordonnées du polynôme $P := 2X^2-5X+6$ dans cette base.

(4) *Bonus :* Montrer que les polynômes $\frac{1}{24}(X-1)(X-3)$, $\frac{-1}{8}(X-1)(X-7)$ et $\frac{1}{12}(X-3)(X-7)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(5) *Bonus :* Donner un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 48, P(3) = -2\pi, P(7) = 4$. (*Indication : on pourra utiliser la base de la question précédente*).

**Solution de l'Exercice 4.** (1) D'après le cours, $\mathbb{R}_2[X]$ est un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est donc un espace-vectoriel. Sa base canonique est $1, X, X^2$, c'est une base, donc $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

(2) La famille $(P_1, P_2, P_3)$ possède 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, et $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, si elle est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ : montrons donc qu'elle est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. On en déduit

$$\lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 = 0.$$

En évaluant en $X = 1$, on a donc tout de suite que $\lambda_1 = 0$. Puis, par exemple, on développe :

$$\lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 = \lambda_3 X^2 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)X + (\lambda_3 - \lambda_2) = 0,$$

donc, comme $1, X, X^2$ est libre, on en déduit

$$\begin{cases} \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 & = 0, \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ : la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est donc libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) On cherche les coordonnées de $P$ dans cette base, i.e. des réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = 2X^2 - 5X + 6 = a + b(X-1) + c(X-1)^2.$$

En developpant à droite, on trouve

$$2X^2 - 5X + 6 = cX^2 + (b-2c)X + (a-b+c).$$

Or $1, X, X^2$ est une famille libre, donc l'écriture dans cette famille est unique. On en déduit donc que

$$\begin{cases} c & = & 2 \\ b-2c & = & -5 \\ a-b+c & = & 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = & 2 \\ b & = & -1 \\ a & = & 3 \end{cases}$$

Les coordonnées de $P = 2X^2 - 5X + 6$ dans la base $(1, X-1, (X-1)^2)$ sont donc $(3, -1, 2)$, i.e. $P = 3 + (-1)(X-1) + 2(X-1)^2$.

(4) On note $Q_1 = \frac{1}{24}(X-1)(X-3), Q_2 = \frac{-1}{8}(X-1)(X-7), Q_3 = \frac{1}{12}(X-3)(X-7)$. On suppose données $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0.$$

Puisque $Q_1(1) = Q_2(1) = 0$, et $Q_3(1) = \frac{12}{12} = 1$, on évalue l'égalité précédente en $X = 1$, et on trouve $\lambda_3 = 0$. De même, puisque $Q_1(3) = Q_3(3) = 0$, et $Q_2(3) = \frac{-(-8)}{8} = 1$ en évaluant l'égalité précédente en $X = 3$ on trouve $\lambda_2 = 0$, et puisque $Q_2(7) = Q_3(7) = 0$ et $Q_1(7) = \frac{24}{24} = 1$, on a $\lambda_1 = 0$ en $X = 7$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et donc la famille $Q_1, Q_2, Q_3$ est libre, et comme elle possède $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(5) On cherche donc un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dont les valeurs en 1,3 et 7 sont fixées. Comme $Q_1, Q_2, Q_3$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, un tel polynôme s'écrit de manière unique comme $P = aQ_1 + bQ_2 + cQ_3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, et on cherche $a, b, c$. Mais comme avant, on évalue en $X = 1$, on trouve

$$aQ_1(1) + bQ_2(1) + cQ_3(1) = c = P(1) = 48,$$

puis on évalue en $X = 3$, et on trouve $b = P(3) = -2\pi$, et en $X = 7$ et on trouve $a = P(7) = 4$. On a donc

$$\begin{cases} P(1) & = 48 \\ P(3) & = -2\pi \\ P(7) & = 4, \end{cases}$$

si, et seulement si,

$$P = 4Q_1 - 2\pi Q_2 + 48Q_3.$$

Si on veut écrire $P$ dans la base canonique, on développe

$$\begin{aligned} P &= 4\frac{1}{24}(X-1)(X-3) - 2\pi\frac{-1}{8}(X-1)(X-7) + 48\frac{1}{12}(X-3)(X-7) \\ &= \frac{1}{6}(X-1)(X-3) + \frac{\pi}{4}(X-1)(X-7) + 4(X-3)(X-7) \\ &= \frac{3\pi+50}{12}X^2 - \frac{6\pi+122}{3}X + \frac{338+7\pi}{4}. \end{aligned}$$