École universitaire Paris-Saclay | Année 2021-2022
Licence de mathématiques 1ère année | Semestre 2

MEU152 – examen final du Lundi 16 mai 2022

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir encadrer *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration****, et pas simplement de citer le cours, et on demande répondre en justifiant aussi la troisième question.*

(1) Soit E, F, G trois espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Montrer que $g \circ f$ est linéaire.

(2) Soit E un espace vectoriel. Si $B = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, alors pour tout $v \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

(3) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-il une projection ?

Exercice 2. On se propose d'étudier l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7x + 3y - 4z - 2t \\ 5x + 5y - 4z - 2t \\ -x + 9y + 4z - 8t \\ 5x + 9y - 4z - 6t \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) Montrer que f est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1, 1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (1, 1, 2, 3), u_4 = (1, -1, 1, -1)$.

(2) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(3) Donner la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(4) Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Donner le rang de f.

(5) Calculer M^5. Que faut-il calculer pour écrire l'expression de $f^5 := \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ f}_{5 \text{ fois}}$ sous la forme "$f^5(x, y, z, t) = ...$" ? *On ne demande pas de faire le calcul dans cette question.*

(6) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ainsi que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(7) (Bonus) Calculer l'expression de f^5 sous la forme $f^5(x, y, z, t) = ...$

Exercice 3. On note $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$.

(1) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une base de P, ainsi que sa dimension.

On note $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ et $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3y - 2z = 0\}$; ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de le démontrer) et on note $L = Q \cap R$.

(3) Donner une base de L.

(4) Montrer que L et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection sur P parallèlement à L.

(5) Quel est le rang de p ?

Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, -1, 0), u_3 = (1, 2, 3)$.

(6) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base.

(7) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$.

(8) Donner la matrice A de p dans la base canonique.