Examen final de Mai – algèbre linéaire- corrigé

Exercice 1. (5 points) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire. *Solution* : On montre $f(\lambda(x,y) + \lambda'(x',y')) = \lambda f(x,y) + \lambda' f(x',y')$ en 4 lignes de calcul.
2. Calculer le noyau de f. *Solution* : (x,y) est dans $\operatorname{Ker} f$ ssi $x+y = x-y = x+y = 0$ ssi $x = y = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$.
3. f est-elle injective ? (Justifier) *Solution* : Son noyau est réduit au singleton vecteur nul, donc f est injective d'après le cours.
4. f est-elle surjective ? (Justifier) *Solution* : Par le théorème du rang et la question 3, on trouve $\operatorname{rg} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 2. (5 points) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels D_1 et D_2 définis par

$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}, \quad D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

1. Montrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, donner en coordonnées (en fonction de x et y) les vecteurs $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$ de la décomposition $u = u_1 + u_2$ associée à la somme directe. *Solution* : Si $u = (x,y) \in D_1 \cap D_2$, on a $x = y$ et $y = 0$. Donc $u = 0$. La somme est donc directe. Si $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $u = (x-y, 0) + (y,y)$. Donc en posant $u_1 = (y,y) \in D_1$ et $u_2 = (x-y, 0) \in D_2$, on a aussi montré que $u = u_1 + u_2 \in D_1 + D_2$, ce qui montre que $D_1 + D_2 = \mathbb{R}^2$ et fournit la décomposition associée à la somme directe.
2. Soit $p\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $p(u) = u_1$ où u_1 est le vecteur calculé dans la question 1. Calculer $p(1,0)$, $p(1,1)$. Plus généralement, calculer les coordonnées de $p(x,y)$. *Solution* : On a $(1,0) \in D_2$ donc $p(1,0) = (0,0)$. On a $(1,1) \in D_1$, donc $p(1,1) = (1,1)$. Enfin, si $u = (x,y)$, $p(x,y) = p(u) = u_1 = (y,y)$.

Exercice 3. (10 points) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$? Rappeler sa base canonique. *Solution* : (Cours) La dimension est 3 et la base canonique est $(1, X, X^2)$.
2. Pour toute la suite de l'exercice, on appelle $f\colon \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, l'application dont on admettra qu'elle est linéaire définie par si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $f(P) = (5a_0 - a_1 - 3a_2) + (4a_0 + a_1 - 4a_2)X + (2a_0 - a_1)X^2$. Calculer trois polynômes $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$. *Solution* : on a $P_0 = f(1) = 5 + 4X + 2X^2$, $P_1 = f(X) = -1 + X - X^2$ et $P_2 = f(X^2) = -3 - 4X$. On vérifie bien que $f(P) = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$.
3. On pose $Q_0 = 1 + X + X^2$, $Q_1 = 1 + X^2$, $Q_2 = 1 + 2X$. Montrer que $B' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. *Solution* : comme il y a trois vecteurs, il suffit de montrer que B' est une famille libre. Le système homogène pour montrer que la famille est libre est donné par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
en faisant $L_2 - L_1 \to L_2$ et $L_3 - L_1 \to L_3$. On a 3 pivots non nuls donc le rang du système est 3 et la seule solution du système homogène est $(0,0,0)$.

4. Calculer $f(Q_i)$, $i = 0, 1, 2$, puis la matrice A' de f dans la base B'. *Solution* :

$$\begin{aligned} f(Q_0) = f(1 + X + X^2) = P_0 + P_1 + P_2 = 1 + X + X^2 = Q_0 \\ f(Q_1) = f(1 + X^2) = P_0 + P_2 = 2 + 2X^2 = 2Q_1 \\ f(Q_2) = f(1 + 2X) = P_0 + 2P_1 = 3 + 6X = 3Q_2 \end{aligned}$$

On a exprimé les $f(Q_i)$ en fonction des Q_j et on en déduit donc que la matrice A' vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$. *Solution* : Par le cours, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$ ssi $\operatorname{rg} f = 3$ ssi le rang de la matrice de f sur n'importe quelle base est 3. On utilise la matrice A' et le système associé est déjà échelonné avec 3 pivots non nuls d'après la question précédente. Donc le rang de A' est 3 et donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$.
6. Soit $g = (f - Id) \circ (f - 2Id) \circ (f - 3Id)$ où Id est l'application identité sur $\mathbb{R}_2[X]$. En utilisant A', montrer que g est l'endomorphisme nul. *Solution* : la matrice de g sur la base B' est le produit des matrices de $f - Id, f - 2Id, f - 3Id$ dans cette base, c'est à dire le produit $(A' - I)(A' - 2I)(A' - 3I)$ où I est la matrice identité. C'est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice de g sur B' est la matrice nulle, g est donc l'endomorphisme nul.

Exercice 4. (10 points) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. On admet que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $F = \operatorname{Vect}(u_1)$ et on pose $G = \operatorname{Vect}(u_2, u_3)$.

1. Déterminer un système d'équations (cartésiennes) de G. *Solution* : on cherche les équations de compatibilité du système $(x, y, z) = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, soit

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_3 & = & z \end{array} \right.$$

Si on fait $L_2 - L_1 \to L_2$ et $L_2 \leftrightarrow L_3$, on voit que les deux premières équations on a deux pivots (inconnues principales) non nuls et la dernière équation s'écrit $0 = x - y$. C'est donc l'équation cartesienne de G.

2. Déterminer les dimensions de G et F et montrer que ce sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. *Solution* : G est engendré par deux vecteurs non liés (car extraits d'une base). Donc $\dim G = 2$. F est engendré par un vecteur non nul donc $\dim F = 1$. On sait que $F + G = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$. De plus, comme u_1 n'est pas lié à (u_2, u_3), on a $F \cap G = \{0\}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire déterminée par $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = 0$. Quelle est la matrice A de f dans la base B ? Reconnaissez-vous quel type d'application linéaire f est ? Si oui, laquelle ? *Solution* : la matrice de f dans la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice de projection : f est donc une projection.

4. Ecrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} de $\mathbb{R}^3$ à B. On range les coordonnées de u_1, u_2, u_3 en colonnes :
$$P_{B_{can},B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calculer la matrice de passage de la base B à la base canonique B_{can}. *Solution* : il faut inverser $P_{B_{can},B}$. On procède par la méthode par échlonnage et réduction. On fait successivement $L_2 - 2L_1 \to L_2, L_3 - 3L_1 \to L_3, -L_2 \to L_2, L_3 + 3L_2 \to L_3, L_1 - L_2 \to L_1, L_2 - L_3 \to L_2$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
Donc
$$P_{B,B_{can}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calculer la matrice de f dans la base canonique. *Solution* : on utilise la formule de changement de bases $Mat_{B_{can}} f = P_{B_{can},B} A P_{B,B_{can}}$. Le calcul donne
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$