Examen final de Mai – algèbre linéaire

Exercice 1. (5 points) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer le noyau de f.
3. f est-elle injective ? (Justifier)
4. f est-elle surjective ? (Justifier)

Exercice 2. (5 points) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels D_1 et D_2 définis par

$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}, \quad D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

1. Montrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, donner en coordonnées (en fonction de x et y) les vecteurs $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$ de la décomposition $u = u_1 + u_2$ associée à la somme directe.
2. Soit $p\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; p(u) = u_1$ où u_1 est le vecteur calculé dans la question 1. Calculer $p(1,0)$, $p(1,1)$. Plus généralement, calculer les coordonnées de $p(x,y)$.

Exercice 3. (10 points) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$? Rappeler sa base canonique.
2. Pour toute la suite de l'exercice, on appelle $f\colon \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, l'application dont on admettra qu'elle est linéaire définie par si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $f(P) = (5a_0 - a_1 - 3a_2) + (4a_0 + a_1 - 4a_2)X + (2a_0 - a_1)X^2$. Calculer trois polynômes $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$.
3. On pose $Q_0 = 1 + X + X^2$, $Q_1 = 1 + X^2$, $Q_2 = 1 + 2X$. Montrer que $B' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $f(Q_i)$, $i = 0,1,2$, puis la matrice A' de f dans la base B'.
5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$.
6. Soit $g = (f - Id) \circ (f - 2Id) \circ (f - 3Id)$ où Id est l'application identité sur $\mathbb{R}_2[X]$. En utilisant A', montrer que g est l'endomorphisme nul.

Exercice 4. (10 points) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1)$. On admet que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $F = \operatorname{Vect}(u_1)$ et on pose $G = \operatorname{Vect}(u_2, u_3)$.

1. Déterminer un système d'équations (cartésiennes) de G.
2. Déterminer les dimensions de G et F et montrer que ce sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire déterminée par $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = 0$. Quelle est la matrice A de f dans la base B ? Reconnaissez-vous quel type d'application linéaire f est ? si oui, laquelle ?
4. Ecrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} de $\mathbb{R}^3$ à B.
5. Calculer la matrice de passage de la base B à la base canonique B_{can}.
6. Calculer la matrice de f dans la base canonique.