Matrices d'une application linéaire et changement de base : exemples

Les exemples suivant visent à illustrer le polycopié de cours.

Soient E et F des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Exemple 1 (Illustration de la propostin 15, page 12). Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

— Soit $v \in E$ ayant pour coordonnées dans la base canonique $(1,1,0)$. C'est à dire, tel que $v = (1,1,0)_{\mathcal{B}}$.

— On considère maintenant la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$u_1 = (1,1,1)_{\mathcal{B}} \quad u_2 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} \quad u_3 = (-2,0,0)_{\mathcal{B}}.$$

Comme $v = (1,1,0)_{\mathcal{B}} = (1,1,1)_{\mathcal{B}} - (0,0,1)_{\mathcal{B}} = u_1 - u_2$, les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$ sont donc $v = (1,-1,0)_{\mathcal{B}'}$.

— Soit $\mathcal{B}'' = (v, u_2, u_3)$. Le vecteur v vérifie $v = 1 \cdot v + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$, donc dans cette base $v = (1,0,0)_{\mathcal{B}''}$.

Matrices d'une application linéaire

Les eemples suivants illustrent la **définition 82, page 40** du polycopié, donnant la définition de matrice d'une application linéaire dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Exemple 2 (Homothétie). Soit $E = F = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E = (e_1, e_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (2x, 2y)$. On a : $f(1,0) = (2,0)_{\mathcal{B}_F}$ et $f(0,1) = (0,2)_{\mathcal{B}_F}$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 3 (Cas d'une matrice non carrée). Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ leurs bases canoniques. C'est-à-dire $\mathcal{B}_E = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}_F = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$u_1 = (1,0),\ u_2 = (0,1) \quad \text{et} \quad v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1).$$

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x, 3y, x+y)$. Calculons les images de u_1 et u_2.

$$f(u_1) = f(1,0) = (2,0,1) \quad \text{et} \quad f(u_2) = f(0,1) = (0,3,1).$$

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ a pour première colonne les coordonnées de $f(u_1)$ (dans $\mathcal{B}_F$) et pour deuxième colonne les coordonnées de $f(u_2)$ (dans $\mathcal{B}_F$). C'est à dire, la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (2x+y, x+2y)$.

Dans la base canonique Soit $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{\mathrm{can}} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, on a

$$f\left((1,0)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}\right) = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \text{ et } f\left((0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}\right) = (1,2)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans une nouvelle base Soient $v_1 = (1,-1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}$ et $v_2 = (1,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}$ et soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. Les vecteurs v_1, v_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$. On peut donc chercher à déterminer la matrice de f dans cette base, ie. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f)$. Pour cela, déterminons $f(v_1), f(v_2)$ et **écrivons leurs coordonnées dans** $\mathcal{B}'$. On a

$$f(v_1) = f\left((1,-1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}\right) = (1,-1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = v_1 = 1v_1 + 0v_2,$$

$$f(v_2) = f\left((1,1)_{\mathcal{B}_{can}}\right) = (3,3)_{\mathcal{B}_{can}} = 3v_2 = 0v_1 + 3v_2.$$

Autrement dit, dans la base $\mathcal{B}'$ on a : $f(v_1) = (1,0)_{\mathcal{B}'}$ et $f(v_2) = (0,3)_{\mathcal{B}'}$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Attention La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **n'est pas** la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. C'est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_F$, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En effet, quand on écrit $f(1,-1) = (1,-1)$ on est en fait en train d'écrire les coordonnées de $f(1,1)$ dans la base canonique. Pour avoir la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'}(f)$, il faut exprimer les coordonnées de $f(1,-1)$ et $f(1,1)$ en fonction des vecteur de $\mathcal{B}'$, c'est à dire

$$f(1,-1) = (1,-1) = 1v_1 + 0v_2, \qquad f(1,1) = (3,3) = 0v_1 + 3v_2.$$

On renvoit à la page 4 pour d'autres exemples, utilisant les matrices de passages.

Matrices de passage

La notion de matrice de passage est définie **page 43, définition 88** dans le polycopié.

De la base canonique vers une nouvelle base

Exemple 5 (En dimension 2)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$ et posons $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Explications : On écrit les vecteurs de la nouvelle base (la base $\mathcal{B}'$) en fonction des vecteurs de la première (la base canonique). On doit donc écrire les coordonnées de v_1 et v_2 en fonction de e_1 et e_2. Les coordonnées de v_1 et v_2 étant déjà données dans la base canonique, on lit immédiatement

$$v_1 = (1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad \text{et} \quad v_2 = (1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2.$$

Exemple 6 (En dimension 3)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}' = ((1,1,0),(1,0,-1),(0,1,2))$, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 7 (Polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. La base canonique de E est $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (X+1, X-1, 2X^2+X+1)$ une autre base. Écrivons les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$X+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 \quad \text{et} \quad X-1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2,$$
$$2X^2+X+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot X + 2\cdot X^2.$$

Donc $X+1 = (1,1,0)_{\mathcal{B}}$ et $X-1 = (-1,1,0)_{\mathcal{B}}$ et $2X^2+X+1 = (1,1,2)_{\mathcal{B}}$. Ainsi, la matrice de passage est $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation en terme de matrice de l'identité

On illustre ici la **Proposition 89, page 43** du polycopié de cours.

Exemple 8 (En dimension 2)**.** Par exemple, prenons $E = \mathbb{R}^2$. Soient $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (0,3)$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. L'application Id_E vérifie (par définition de l'application identité) :

$$\mathrm{Id}_E(v_1) = v_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_E(v_2) = v_2$$

Revenons à la définition de matrice d'une application linéaire (cf. page **polycopié, page 40, définition 82**). Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E$, il nous faut écrire les coordonnées de $\mathrm{Id}_E(v_1)$ et $\mathrm{Id}_E(v_2)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Id}_E(v_1) = v_1 = (1,2)_{\mathcal{B}} = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2,$$
$$\mathrm{Id}_E(v_2) = v_2 = (0,3)_{\mathcal{B}} = 0\cdot e_1 + 3\cdot e_2.$$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemples, hors de la base canonique

Tous les exemples vus jusqu'à présent portaient sur des passages de la base canonique à une autre base. On illustre maintenant les notions précédentes dans des cas où ni la base de départ ni la base d'arrivée ne sont la base canonique.

En particulier, si $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont des bases de E et que l'on vous demande de déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ vous avez deux possibilités

— Ou bien chercher à exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}''$ en fonctions de ceux de $\mathcal{B}'$.
— Ou bien déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et utiliser le fait que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$.

Exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit les vecteurs suivants (les coordonnées sont données dans la base canonique)

$$u_1 = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \quad u_2 = (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \qquad v_1 = (2,2)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \quad v_2 = (2,0)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}.$$

On pose $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2)$. Déterminons $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Avec la première méthode Pour cela, écrivons les coordonnées de v_1 et v_2 en fonction de u_1 et u_2. On a

$$v_1 = (2,2)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} + (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2,$$
$$v_2 = (2,0)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} - (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 1\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2.$$

C'est à dire $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_2 = (1,-1)_{\mathcal{B}'}$. Donc

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}''}\mathrm{Id}_E = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \end{array}$$

Avec la deuxième méthode On note $\mathcal{B}$ la base canonique et on détermine les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}''}$:

$$P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Afin d'utiliser la formule encadrée, il nous faut maintenant déterminer l'inverse de $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}$ (cf. méthode vue au cours du premier semestre). On a :

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ est donc :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}''} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 10 (Polynômes). Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ l'ev. des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On note $e_1 := 1$ (le polynôme constant égal à 1) et $e_2 = X$. La base canonique de E est $\mathcal{B}_{\mathrm{can}} = (e_1, e_2) = (1, X)$. On considère les deux nouvelles bases suivantes

$$\mathcal{B} = (X+1, X-1) \qquad \mathcal{B}' = (2X, 3).$$

Déterminons $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Pour cela, calculons $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}$. Pour obtenir ces matrices il faut exprimer $X+1$ et $X-1$ ainsi que $2X$ et 3 :

$$X+1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 \quad X-1 = (-1)\cdot e_1 + 1\cdot e_2$$

$$2X = 0 \cdot e_1 + 2e_2 \quad 3 = 3 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

Et donc les matrices de passages sont :

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inverse de $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$ est $P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Changement de base

Changement de base pour les coordonnées d'un vecteur

On illustre ici la **proposition 90, page 44** du polycopié.

Exemple 11. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ où u_1, u_2 sont les vecteurs ayant pour coordonnées dans la base canonique :

$$u_1 = (1,2)_{\mathcal{B}} \qquad u_2 = (3,0)_{\mathcal{B}}.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et son inverse est } P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $v = (-5,2)_{\mathcal{B}}$, alors dans la base $\mathcal{B}'$, ce vecteur a pour coordonnées

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Interprétation Dans la base $\mathcal{B}'$, le vecteur v s'écrit donc $(1,-2)$. Ceci signifie

$$v = 1 \cdot u_1 + (-2) \cdot u_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad v = (1,-2)_{\mathcal{B}'}.$$

Changement de base pour une matrice d'application linéaire

Dans l'Exemple 4, nous avions calculé « à la main » la matrice de l'application f dans une nouvelle base. Comme pour les vecteurs, il n'est pas toujours évident de voir directement comment s'écrit la matrice de f dans une nouvelle base. On dispose ici d'une formule : **cf. Proposition 92, page 44**.

Exemple 12. On reprend l'Exemple 4. On avait $E = F = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = 2x+y, x+2y$ (dans la base canonique) et $\mathcal{B}' = ((1,-1),(1,1))$. Donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$ est alors $P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = 1/2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Notons que dans cet exemple $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_{\text{can}}$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F = \mathcal{B}'$ donc $P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} = P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$). Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} A P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$