Contrôle continu 2 – algèbre linéaire- CORRIGÉ

Exercice 1 (vrai/faux)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E.

1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Oui. cf cours.
2. L'union de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel. Non. Dans le cours il est présenté l'exemple de $\mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1)$ qui ne contient pas le vecteur $(1,1)$.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$. Non, si on prend $F = G = \mathbb{R}u$ avec u vecteur non nul, alors $F + G = \mathbb{R}u$ et donc on aurait 2=1.
4. La composée d'applications linéaires est linéaire. Oui, cf cours.
5. Une application linéaire f est surjective si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Non, si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x,0)$, alors f est linéaire, son noyau est bien $\{0_\mathbb{R}\}$ mais son image ne contient pas $(0,1)$.
6. Une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est injective si $\operatorname{rg}(f) = n$. Oui, cf cours (conséquence du théorème du rang entre deux espaces de dimension n)
7. L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x,y) = (x+y, x+10^4y, x-10^8y)$ est surjective. Non, on a que $\dim(\operatorname{Im} f)$ est inférieure à la dimension de $\mathbb{R}^2$ par la formule du rang. Donc $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^3$.
8. L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\sin x, \sin y)$ est linéaire. Non, par exemple, $\sin(x+x) \neq 2\sin x$ pour $x = \pi/2$ ($\sin\pi = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$) donc $f(\pi,0) \neq 2f(\pi/2,0)$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^n$, on prend le sous-espace vectoriel

$$E = \{u = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0,\ 4x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

Soient e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, etc. Soit $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Montrer que $E \cap F = \{0\}$. Si $u = (x_1,\dots,x_n) \in E \cap F$, alors $x_3 = \ldots = x_n = 0$. Donc $x_1 + x_2 = 0$ et $x_1 = 0$ donc $x_2 = 0$. Ceci montre $u = 0$.
2. Montrer que $E + F = \mathbb{R}^n$. (Indication : on peut partir d'un vecteur $u = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et commencer par trouver un vecteur $v = (y_1,\dots,y_n) \in E$ avec $y_j = x_j$ si $j \geqslant 3$.) Prenons $v = (y_1, y_2, x_3,\dots,x_n)$ d'inconnues y_1 et y_2. On a
$$\begin{aligned} v \in E \ \text{ ssi } & \ y_1 + y_2 = -x_3, y_1 = x_3, 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ \text{ssi } & \ y_1 = x_3, y_2 = -2x_3. \end{aligned}$$
Posons $w = u - v$. On trouve $w = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_3, 0\dots,0) \in F$. Donc $u = v + w \in E + F$. Ceci montre bien que la somme est $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire la dimension de E. On a donc montré que la somme est directe. Donc $\dim E + \dim F = n$. Comme $\dim F = 2$ (clairement (e_1, e_2) en est une base), on a $\dim E = n - 2$.
4. Trouver une base de E contenant $(e_4,\dots,e_n)$. Il y a $n-3$ vecteurs dans cette famille libre. Il faut la compléter avec un vecteur indépendant des $n-3$ autres : on obtiendra une famille libre de $n-2$ éléments dans E de dimension $n-2$, donc une base. Un vecteur u de la forme $(x_1, x_2, x_3, 0,\dots,0)$ fera l'affaire (car il est clairement indépendant des autres). Si on fixe $x_3 = 1$, on trouve avec les équations $x_1 = 1$, puis $x_2 = -2$. Donc $u = (1,-2,1,0,\dots,0)$ convient.

Exercice 3. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Ecrire le système obtenu en fixant successivement $X = 1, X = -1$ et $X = 2$ dans l'équation $\lambda(X-2) + \mu(X+1) + \nu(X-1)^2 = 0$.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ -3\lambda & & & + & 4\nu & = & 0 \\ & & 3\mu & + & \nu & = & 0 \end{array} \right. .$$

2. Montrer que $\mathscr{B} = (X-2, X+1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, il suffit de montrer que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Cela revient à résoudre le système (S). On fait $L_2 - 3L_1 \to L_2$ puis $2L_3 + L_2 \to L_3$ et on trouve

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ & - & 6\mu & + & 4\nu & = & 0 \\ & & 3\mu & + & \nu & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ & - & 6\mu & + & 4\nu & = & 0 \\ & & & & 6\nu & = & 0 \end{array} \right. .$$

Le système a 3 pivots, donc de rang 3. On obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$.

3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P(2) = 0$ et $P(-1) = 1$ et donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On cherche P sous la forme $P(X) = \lambda(X-2) + \mu(X+1) + \nu(X-1)^2$ et (λ, μ, ν) seront ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Le système devient

$$(T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ -3\lambda & & & + & 4\nu & = & 1 \\ & & 3\mu & + & \nu & = & 0 \end{array} \right. .$$

On fait les mêmes combinaisons de ligne, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & 2\mu & & & = & 0 \\ & - & 6\mu & + & 4\nu & = & 1 \\ & & & & 6\nu & = & 1 \end{array} \right. .$$

D'où $\nu = 1/6$, puis $\mu = -1/18$ et $\lambda = -1/9$.

4. On admet (même méthode que dans la question 3) qu'il existe deux uniques polynômes $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $Q(-1) = Q(2) = 0$ et $Q(1) = 1$ et $R \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $R(-1) = R(1) = 0$ et $R(2) = 1$, et montrer (sans calculer Q et R) que $\mathrm{Vect}(P)$ et $\mathrm{Vect}(Q, R)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$. La famille (P, Q, R) est nécessairement libre : si $aP + bQ + cR = 0$ alors en évaluant en $X = -1$, on trouve $a = 0$, en $X = 1$, $b = 0$, en $X = 2$, $c = 0$. Donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et les deux sous-espaces $\mathrm{Vect}(P)$ et $\mathrm{Vect}(Q, R)$ sont supplémentaires (leur somme est $\mathbb{R}_2[X]$ et leur intersection se réduit au polynôme nul.)

Exercice 4. Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit la transposée d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notée A^T, par

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), f(A) = A^T$, est une application linéaire. Si A, A' sont deux matrices et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda A + \lambda' A' = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & \lambda b + \lambda' b' \\ \lambda c + \lambda' c' & \lambda d + \lambda' d' \end{pmatrix}.$$

Donc

$$f(\lambda A + \lambda' A') = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & \lambda c + \lambda' c' \\ \lambda b + \lambda' b' & \lambda d + \lambda' d' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \lambda f(A) + \lambda' f(A').$$

2. Soient $\mathscr{S}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\colon A^T = A\}$ et $\mathscr{A}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\colon A^T = -A\}$. Montrer que $\mathscr{S}_2 = \mathrm{Ker}(Id - f)$ et $\mathscr{A}_2 = \mathrm{Ker}(Id + f)$ où Id est l'application linéaire identité sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathscr{S}_2 \text{ ssi } A = f(A) \text{ ssi } (Id - f)(A) = 0 \text{ ssi } A \in \mathrm{Ker}(Id - f).$$

$$A \in \mathscr{A}_2 \text{ ssi } A = -f(A) \text{ ssi } (Id + f)(A) = 0 \text{ ssi } A \in \mathrm{Ker}(Id + f).$$

3. Donner la dimension de $\mathscr{A}_2$ en en trouvant une base. Si on écrit l'équation $A^T = -A$ en termes des coefficients a, b, c, d de A, on trouve $a = d = 0$, $b = -c$. On peut prendre c comme inconnue secondaire, ce qui montre que $\mathscr{A}_2$ est de dimension 1 et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en forme une base.

4. Montrer que $\mathscr{A}_2 \cap \mathscr{S}_2 = \{0\}$, puis que $\mathscr{A}_2 + \mathscr{S}_2 = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (pour la somme, on pourra commencer par analyser le problème $A = A' + A''$ avec $A' \in \mathscr{A}_2$ et $A'' \in \mathscr{S}_2$ en appliquant f à cette équation pour déterminer A' et A'' en fonction de A.) /in Pour l'intersection, si on a $A \in \mathscr{A}_2 \cap \mathscr{S}_2$ alors $A^T = -A$ et $A^T = A$. Donc $-A = A$, ce qui implique $A = 0$ (la matrice nulle. Pour la somme si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ a une decomposition $A = A' + A''$ comme demandé, on a alors $A^T = f(A) = f(A') + f(A'') = -A' + A''$. On résout et on trouve que c'est équivalent à $A' = \frac{1}{2}(A - A^T)$ et $A'' = \frac{1}{2}(A + A^T)$. On voit bien que $A' \in \mathscr{A}_2$ et $A'' \in \mathscr{S}_2$ car ${A^T}^T = A$. Donc on a que $A \in \mathscr{A}_2 + \mathscr{S}_2$.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Soient $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ les deux vecteurs de la base canonique.

1. Vérifier que f est une application linéaire. Donner la matrice A de f dans la base canonique. Pour la linéarité, on écrit

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + \lambda'(x',y')) &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\ &= (\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y', \lambda x + \lambda' x' - \lambda y - \lambda' y') \\ &= \lambda(x+y, x-y) + \lambda'(x'+y', x'-y') = \lambda f(x,y) + \lambda' f(x',y'). \end{aligned}$$

On calcule $f(e_1) = (1,1)$ et $f(e_2) = (1,-1)$ qu'on range en colonne pour donner $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que A^2 est de la forme cI où c est une constante dont on donnera la valeur numérique et I est la matrice identité. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $c = 2$.

3. Déduire de la question précédente que l'application f est inversible et exprimer sa bijection réciproque à l'aide de f. Solution 1 : A^2 est la matrice de $f \circ f$ sur la base canonique. On a donc $f \circ f = 2Id$ ou encore $(\frac{1}{2}f) \circ f = Id = f \circ (\frac{1}{2}f)$. Donc f est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} = \frac{1}{2}f$.
   Solution 2 : On a $A^2 = 2I$. Donc $B = \frac{1}{2}A$ vérifie $BA = AB = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A$. Or A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique donc $f^{-1} = \frac{1}{2}f$.

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = \lambda(x,y)$. Montrer que $\lambda = \pm\sqrt{2}$ en utilisant f^2. Trouver alors les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y) = \sqrt{2}(x,y)$. Si $f(x,y) = \lambda(x,y)$, on a $f^2(x,y) = f(\lambda(x,y)) = \lambda f(x,y) = \lambda^2(x,y)$. Or on sait que $f^2(x,y) = 2(x,y)$ par la question précédente. Donc $\lambda^2(x,y) = 2(x,y)$. Comme $(x,y) \neq (0,0)$, cela implique nécessairement que $\lambda^2 = 2$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Pour $\lambda = \sqrt{2}$ on a donc

$$f(x,y) = \sqrt{2}(x,y) \text{ ssi } (x+y, x-y) = \sqrt{2}(x,y) \text{ ssi } ((1-\sqrt{2})x, x) = (-y, (1+\sqrt{2})y).$$

Comme $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$, les solutions sont donc les vecteurs de la forme $y(1+\sqrt{2}, 1)$, $y \in \mathbb{R}$.