Contrôle continu 2 – algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E.

1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. L'union de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$.
4. La composée d'applications linéaires est linéaire.
5. Une application linéaire f est surjective si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
6. Une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est injective si $\operatorname{rg}(f) = n$.
7. L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x,y) = (x+y, x+10^4y, x-10^8y)$ est surjective.
8. L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\sin x, \sin y)$ est linéaire.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^n$, on prend le sous-espace vectoriel

$$E = \{u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0,\ 4x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

Soient e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, etc. Soit $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Montrer que $E \cap F = \{0\}$.
2. Montrer que $E + F = \mathbb{R}^n$. (Indication : on peut partir d'un vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et commencer par trouver un vecteur $v = (y_1, \dots, y_n) \in E$ avec $y_j = x_j$ si $j \geqslant 3$.)
3. En déduire la dimension de E.
4. Trouver une base de E contenant $(e_4, \dots, e_n)$.

Exercice 3. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Ecrire le système obtenu en fixant successivement $X = 1, X = -1$ et $X = 2$ dans l'équation $\lambda(X-2) + \mu(X+1) + \nu(X-1)^2 = 0$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (X-2, X+1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P(2) = 0$ et $P(-1) = 1$ et donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
4. On admet (même méthode que dans la question 3) qu'il existe deux uniques polynômes $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $Q(-1) = Q(2) = 0$ et $Q(1) = 1$ et $R \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $R(-1) = R(1) = 0$ et $R(2) = 1$, et montrer (sans calculer Q et R) que $\operatorname{Vect}(P)$ et $\operatorname{Vect}(Q, R)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4. Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit la transposée d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notée A^T, par

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), f(A) = A^T$, est une application linéaire.
2. Soient $\mathscr{S}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\colon A^T = A\}$ et $\mathscr{A}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\colon A^T = -A\}$. Montrer que $\mathscr{S}_2 = \mathrm{Ker}(Id - f)$ et $\mathscr{A}_2 = \mathrm{Ker}(Id + f)$.
3. Donner la dimension de $\mathscr{A}_2$ en en trouvant une base.
4. Montrer que $\mathscr{A}_2 \cap \mathscr{S}_2 = \{0\}$, puis que $\mathscr{A}_2 + \mathscr{S}_2 = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (pour la somme, on pourra commencer par analyser le problème $A = A' + A''$ avec $A' \in \mathscr{A}_2$ et $A'' \in \mathscr{S}_2$ en appliquant f à cette équation pour déterminer A' et A'' en fonction de A.)

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Soient $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ les deux vecteurs de la base canonique.

1. Vérifier que f est une application linéaire. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Montrer que A^2 est de la forme cI où c est une constante dont on donnera la valeur numérique et I est la matrice identité.
3. Déduire de la question précédente que l'application f est bijective et exprimer sa bijection réciproque à l'aide de f.
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = \lambda(x,y)$. Montrer que $\lambda = \pm\sqrt{2}$ en utilisant f^2. Trouver alors les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y) = \sqrt{2}(x,y)$.