Partiel de mars – algèbre linéaire

Exercice 1. (4 points) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. L'ensemble A n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(1,0)$ et $(0,1)$ sont dedans mais pas la somme de ces deux vecteurs $(1,1)$.
2. L'ensemble B n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(0,1)$ est dedans mais son opposé, $(0,-1)$ n'est pas dedans.
3. L'ensemble C est un sev de $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$ est dans C et si x, y, λ, μ sont quatre réels quelconques alors
$$\lambda(x,x) + \mu(y,y) = (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \in C.$$
Ainsi C est stable par combinaisons linéaires donc est un sev de $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble D n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(0,0)$ n'est pas dedans.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-ensemble P défini par
$$P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. L'ensemble P est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ d'un système linéaire homogène, donc est un sev par le cours (on peut aussi vérifier que $(0,0,0)$ est dedans et que P est stable par combinaisons linéaires).
2. On a échelonne le système $2x + 3y - z = 0$:
$$2x + 3y - z = 0 \iff (x,y,z) = (-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z, y, z) \iff (x,y,z) = y(-\frac{3}{2}, 1, 0) + z(\frac{1}{2}, 0, 1).$$
On a écrit l'inconnue principale x en fonction des deux inconnues secondaires y et z. On sait alors par le cours que, en posant $f_1 := (-\frac{3}{2}, 1, 0)$ et $f_2 := (\frac{1}{2}, 0, 1)$, la famille (f_1, f_2) forme une base de P qui est donc un sev de dimension 2.
3. On a $e_1 = 2f_1$ et $e_2 = 2f_2$ donc (e_1, e_2) est bien une base de P. Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de P. Par la mise sous forme échelonnée de la question précédente on voit que
$$v = \frac{y}{2}e_1 + \frac{z}{2}e_2.$$
Les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) sont donc $(\frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ et les coordonnées de v dans la base (e_2, e_1) sont $(\frac{z}{2}, \frac{y}{2})$.

Exercice 3. (2 points) Soit $u = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ et $V = \mathrm{Vect}(u)$. L'espace V est engendré par un vecteur non nul ; c'est donc un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On veut mettre le système $\lambda u = X$ d'inconnue λ sous forme échelonnée et trouver les conditions de compatibilité :
$$X \in V \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u = X \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - 2x \\ z - 3x \\ t - 4x \end{pmatrix}.$$
Ainsi le système d'équations pour V est donné par $y - 2x = z - 3x = t - 4x = 0$.

Exercice 4. (7 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs suivants : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$. On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et on pose $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. On écrit le système $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$, on le place sous forme échelonnée et les vecteurs correspondants aux inconnues principales forment par le cours une base de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Ici le système de départ est :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ -\lambda & - & \mu & - & 2\nu & = & 0 \\ \lambda & + & 2\mu & + & 3\nu & = & 0 \end{array}\right.$$

En effectuant les opérations sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ & - & \mu & - & \nu & = & 0 \\ & & 2\mu & + & 2\nu & = & 0 \end{array}\right.$$

En effectuant ensuite l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ & - & \mu & - & \nu & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

On voit donc qu'il y a deux pivots correspondants aux deux inconnues λ et μ. Ainsi une base de F est la famille (u, v). L'espace F est en particulier de dimension 2 donc différent de $\mathbb{R}^3$ et donc (u, v, w) n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

2. Le raisonnement est ici le même qu'à la question 2 de l'exercice 2. On échelonne le système $x + 2y + z = 0$:

$$x + 2y + z = 0 \iff (x, y, z) = (-2y - z, y, z) \iff (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

On a écrit l'inconnue principale x en fonction des deux inconnues secondaires y et z. On sait alors par le cours que, en posant $g_1 := (-2, 1, 0)$ et $g_2 := (-1, 0, 1)$, la famille (g_1, g_2) forme une base de G (et donc l'engendre) et donc que G est un sev de dimension 2.

3. Les espaces F et G sont tous deux de même dimension 2. De plus les vecteurs g_1 et g_2 précédents sont visiblement dans F et ils engendrent G, donc G est inclus dans F et par dimension $G = F$.

Exercice 5. (4 points) On travaille dans $\mathbb{R}^4$. Soit V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1, v_2 donnés par $v_1 = (1, 0, 2, 3)$ et $v_2 = (2, 3, 0, 1)$.

1. On met le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ sous forme échelonnée. Ici le système de départ est :

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & = & 0 \\ 3\lambda_2 & & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

En effectuant les opérations sur les lignes $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & = & 0 \\ & & -4\lambda_2 & = & 0 \\ & & -5\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Il y a deux pivots, donc V est de dimension 2 et (v_1, v_2) en est une base. C'est en particulier une famille libre.

2. On échelonne le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 + \cdots + \lambda_6 e_4 = 0$. Par le cours, les vecteurs correspondants aux inconnues principales forment une base de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs v_1 et v_2 répondant ainsi à la question. On travaille matriciellement et on échelonne la matrice correspondant au système. La matrice est départ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ pour obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow 3L_3 + 4L_2$ et $L_4 \leftarrow 3L_4 + 5L_2$ pour obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On effectue l'opération $L_4 \leftarrow 2L_4 - 3L_3$ pour obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ainsi (v_1, v_2, e_1, e_2) forme une base de $\mathbb{R}^4$ qui complète la famille (v_1, v_2).