# Partiel de mars – algèbre linéaire

*Durée : 2h*

*La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de ne pas écrire au crayon à papier. L'utilisation de la calculatrice, du téléphone portable ou de tout objet connecté ainsi que des notes de cours/TD est interdite.*

**Toutes les réponses à une interrogation (avec un ?) doivent recevoir une justification.**

**Exercice 1.** (4 points) Les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |xy = 0\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |x \leqslant y\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |x = y\}$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |x = y + 1\}$.

**Exercice 2.** (4 points) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-ensemble $P$ défini par

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $P$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base et la dimension de $P$.
3. Posons $e_1 := (-3, 2, 0)$ et $e_2 := (1, 0, 2)$. On admet que $(e_1, e_2)$ est une base de $P$. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $P$. Quelles sont ses coordonnées dans la base $(e_1, e_2)$ de $P$ ? Et dans la base $(e_2, e_1)$ ?

**Exercice 3.** (2 points) Soit $u = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ et $V = \mathrm{Vect}(u)$. Quelle est la dimension de $V$ ? Donner un système d'équations cartésiennes pour $V$.

**Exercice 4.** (7 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs suivants : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et on pose $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. On admet que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u,v,w) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$ ? Donner une base de $F$ et sa dimension.
2. Montrer que $G = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $F = G$.

**Exercice 5.** (4 points) On travaille dans $\mathbb{R}^4$. Soit $V$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, v_2$ donnés par $v_1 = (1, 0, 2, 3)$ et $v_2 = (2, 3, 0, 1)$.

1. La famille $(v_1, v_2)$ est elle libre ? Quelle est la dimension de $V$ ?
2. Compléter $(v_1, v_2)$ en une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, 0), \ldots, e_4 = (0, 0, 0, 1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.