Contrôle continu 1 Correction– algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux). *Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E.*

1. *Toute famille contenant une famille libre est libre :* NON ! Dans $\mathbb{R}^2$: la famille $e_1 = (1,0)$ est libre mais pas la famille $(e_1, 2e_1)$.
2. *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice :* OUI, cf. cours.
3. *Toute famille libre contient une famille génératrice :* NON dans $\mathbb{R}^2$ la famille $e_1 = (1,0)$ est libre mais n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.
4. *Toute famille génératrice peut-être complétée en une base :* NON (par contre on peut en extraire une base) : dans $\mathbb{R}^2$ si on prend la famille $((1,0);(0,1);(1,1))$ elle est génératrice mais on ne peut pas la compléter en une base car elle n'est pas libre.
5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. De toute base de E on peut extraire une base de F :* NON : par exemple si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}(1,1)$ et si on prend comme base de $\mathbb{R}^2$ la base canonique (e_1, e_2) alors ni e_1 ni e_2 ne sont dans F !
6. *Soit (u_1,u_2,u_3,u_4) une famille libre de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4 :* OUI cf cours.
7. *Soit (u_1,u_2,u_3,u_4) une famille génératrice de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4 :* NON par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la dimension est 2 mais on peut prendre comme famille génératrice $u_1 = (1,0)$, $u_2 = (0,1)$, $u_3 = 2u_1$ et $u_4 = 2u_2$ (qui est génératrice car la sous-famille (u_1,u_2) l'est déjà).
8. *Si E contient un sous-espace vectoriel F de dimension finie, E est de dimension finie :* NON, par exemple $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie car la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre mais $\mathbb{R}[X]$ contient $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2 (donc finie).

Exercice 2. *On considère la famille $u_1 = (4,1,2,3)$, $u_2 = (2,2,1,1)$, $u_3 = (1,1,2,2)$, $u_4 = (7,10,-1,-2)$ de $\mathbb{R}^4$.*

1. *La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est-elle libre ?* On met le système $\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = 0$ sous forme échelonnée en faisant des opérations sur les lignes. Si les 4 inconnues sont principales alors la famille est libre et forme une base sinon elle est liée et on en extrait une base en prenant les vecteurs u_i correspondants aux inconnues principales λ_i. Ici donc le système de départ est :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 7\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 10\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & - & \lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

On effectue dans cet ordre les opérations suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \ ; \ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \ ; \ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \ ; \ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1,$$

puis

$$L_3 \leftrightarrow L_2 \ ; \ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \ ; \ L_4 \leftarrow -3L_4 + 5L_2,$$

puis enfin $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ pour arriver au système échelonné suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 10\lambda_4 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & & & - & 21\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & -3\lambda_3 & + & 9\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système admet 3 inconnues principales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et une inconnue secondaire λ_4. La famille $(u_1, \dots, u_4)$ n'est donc pas libre.

2. *Donner une base de* $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ *:* par ce qui précède la famille (u_1, u_2, u_3) est une base.
3. *La famille* (u_1, u_2, u_3, u_4) *est-elle génératrice de* $\mathbb{R}^4$ *?* La question précédente nous donne une base de cardinal 3 de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ donc cet espace est de dimension 3 et inclus dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4. On déduit que ces deux espaces ne sont pas égaux, donc que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
4. *Donner une équation cartésienne de* $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ *:* soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$. On met le système $\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = x$ sous forme échelonnée en reprenant les mêmes opérations qu'à la première question et en suivant cette fois ces opérations sur la colonne des (x_i). On obtient ainsi le sytème :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 10\lambda_4 & = & & x_2 & & \\ & & -3\lambda_2 & & & - & 21\lambda_4 & = & & -2x_2 & +x_3 & \\ & & & & -3\lambda_3 & + & 9\lambda_4 & = & x_1 & & -2x_3 & \\ & & & & & & 0 & = & x_1 & -x_2 & +3x_3 & -3x_4 \end{array}\right.$$

Ainsi un vecteur x est dans $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ si et seulement si ses coordonnées vérifient $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0$ qui est donc l'équation cartésienne recherchée.

Exercice 3. *Soit* (S) *le système suivant*

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ x & + & 7y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. *Réécrire le système sous forme matricielle :* sous forme matricielle ce système se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Soit* $Sol(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z)$ *est solution de* $S\}$. *Montrer que* $Sol(S)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *:* notons que $(0, 0, 0)$ est solution. Si $u = (a, b, c)$ et $v = (x, y, z)$ sont deux vecteurs de $Sol(S)$ et si λ et μ sont des nombres réels, on veut montrer que $\lambda u + \mu v$ est encore une solution. Posons $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Matriciellement ceci s'écrit :

$$A \left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \lambda A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $Sol(S)$ est bien un sev de $\mathbb{R}^3$.

3. *Quelle est la dimension de* $Sol(S)$ *?* On sait par le cours que la dimension d'un espace donné par des équations cartésiennes est le nombre d'inconnues secondaires du système des équations considérées. Il s'agit donc de mettre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ x & + & 7y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

sous forme échelonnée. Pour cela on effectue dans cet ordre les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \ ; \ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \ ; \ L_2 \leftarrow \frac{1}{8}L_2 \ ; \ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2.$$

On obtient ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Le nombre d'inconnues secondaires est 1 (la variable z), donc par le cours l'espace des solutions du système est de dimension 1. Notons que dans ce cas on peut le faire à la main : on vient de montrer que (x, y, z) est une solution si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier l'espace des solutions du système est de dimension 1 et une base est donnée par le vecteur $(1, -1, 2)$.

4. *On note le système* (T)

$$(T) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 5y & + & z & = & 1 \\ x & + & 7y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 15y & & & = & 3 \end{array} \right.$$

Est-ce que l'ensemble des solutions de (T)*, Sol*(T) *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *?* NON car le vecteur $(0, 0, 0)$ est pas solution de (T).

Exercice 4. *Soit* $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$.

1. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. Même correction que pour la question 3.2 de l'exercice précédent.
2. *Soit* $D = \text{Vect}(1, 0, 1)$. *Montrer que* D *est un sous-espace vectoriel de* P. Par définition le Vect(1,0,1) est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 0, 1)$ donc c'est notamment un espace vectoriel. Il s'agit donc de montrer qu'il est inclus dans P. Pour cela il suffit de vérifier que le vecteur $(1, 0, 1)$ est dans P. Or $1 + 0 - 1 = 0$ donc $(1, 0, 1)$ appartient bien à P ; D est donc un sous-espace vectoriel de P.
3. *Soit* $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |3y - x + z = 0\}$. *On admet que* Q *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *A-t-on* $Q \subset P$ *ou* $P \subset Q$ *?* Le vecteur $(1, 1, 2)$ est dans P mais n'est pas dans Q donc P n'est pas inclus dans Q. Par ailleurs le vecteur $(0, 1, -3)$ est dans Q mais n'est pas dans P donc Q n'est pas inclus dans P.
4. *Montrer que* $P \cap Q$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *égal à* D. *En donner une base.* Notons que $(0, 0, 0)$ est dans P et dans Q (car P et Q sont des espaces vectoriels). Soit $u = (x, y, z)$ et $v = (a, b, c)$ deux vecteurs dans $P \cap Q$ et soit λ, μ deux nombres réels. On sait que $\lambda u + \mu v$ est dans P et est dans Q car P et Q sont des espaces vectoriels, donc $\lambda u + \mu v$ est dans l'intersection $P \cap Q$ qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus le vecteur $(1, 0, 1)$ est dans $P \cap Q$ donc la droite D qui est engendrée par ce vecteur est incluse dans $P \cap Q$. Il suffit de montrer que $P \cap Q$ est de dimension 1 pour conclure. Or (x, y, z) est dans $P \cap Q$ si et seulement si il est solution du système donné par les équations de P et de Q, donc du sytème :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Sous forme échelonnée ce système est (en remplaçant L_2 par $L_1 + L_2$)

$$\begin{cases} -x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ & & 4y & & & = & 0 \end{cases}$$

autrement dit (x, y, z) est dans $P \cap Q$ si et seulement si $x = z$ et $y = 0$: il y a une unique inconnue secondaire donc le cours nous dit que ce système est de dimension 1, mais ici on voit aussi directement que (x, y, z) est solution si et seulement si il est dans le vect de $(1, 0, 1)$ ie si et seulement si il est dans D. En particulier on conclut $P \cap Q = D$.

Exercice 5. *Dans* $\mathbb{R}^5$, *on considère le sous-ensemble*

$$P = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : 5x + 3y + z + u = y + z + t = z - u + t = 0\}.$$

1. *Montrer que P est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^5$. Même correction que pour l'exercice 3.2.
2. *Donner une base $(e_1, \dots, e_p)$ de P, où $p = \dim P$ est à préciser.* On met le système donné par les équations de P sous forme échelonnée réduite. Le système de départ est :

$$\begin{cases} 5x & + & 3y & + & z & & & + & u & = & 0 \\ & & y & + & z & + & t & & & = & 0 \\ & & & & z & + & t & - & u & = & 0 \end{cases}$$

on effectue dans cet ordre les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \ ; \ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \ ; \ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3.$$

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} 5x & = & t & +u \\ y & = & & -u \\ z & = & -t & +u \end{cases}$$

Ainsi un vecteur (x, y, z, t, u) est solution si et seulement si il est de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi P est de dimension 2 de base (e_1, e_2) où $e_1 = (\frac{1}{5}, 0, -1, 1, 0)$ et $e_2 = (\frac{-2}{5}, -1, 1, 0, 1)$.
3. *Compléter cette base en une base de* $\mathbb{R}^5$. Notons $f_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, f_5 := (0, \dots, 0, 1)$ les 5 vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Il s'agit de mettre sous forme échelonnée le système $xe_1 + ye_2 + a_1 f_1 + \cdots + a_5 f_5 = 0$. Les vecteurs correspondants aux inconnues principales formeront une base de $\mathbb{R}^5$ qui contiendra e_1 et e_2 et répondra ainsi à la question. Ecrit matriciellement, la matrice correspondante au système est la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue dans cet ordre les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \ ; \ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \ ; \ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,$$

puis

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \ ; \ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \ ; \ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \ ; \ L_5 \leftarrow L_5 - L_4.$$

On obtient ainsi la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que x, y, a_1, a_2, a_3 sont les inconnues principales et a_4, a_5 les inconnues secondaires. Ainsi on peut compléter (e_1, e_2) en la base $(e_1, e_2, f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^5$.