Contrôle continu 1 – algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E.

1. Toute famille contenant une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
3. Toute famille libre contient une famille génératrice.
4. Toute famille génératrice peut-être complétée en une base.
5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. De toute base de E on peut extraire une base de F.
6. Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4.
7. Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille génératrice de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4.
8. Si E contient un sous-espace vectoriel F de dimension finie, E est de dimension finie.

Exercice 2. On considère la famille $u_1 = (4, 1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 2, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 2, 2)$, $u_4 = (7, 10, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
2. Donner une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
3. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
4. Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 3. Soit (S) le système suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y + z & = & 0 \\ x + 7y + 3z & = & 0 \\ 2x - z & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Réécrire le système sous forme matricielle.
2. Soit $Sol(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \text{ est solution de } S\}$. Montrer que $Sol(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Quelle est la dimension de $Sol(S)$?
4. On note le système (T)
$$(T) : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y + z & = & 1 \\ x + 7y + 3z & = & 2 \\ 2x + 15y & = & 3 \end{array} \right.$$
Est-ce que l'ensemble des solutions de (T), $Sol(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $D = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de P.

3. Soit $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; | 3y - x + z = 0\}$. On admet que Q est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $Q \subset P$ ou $P \subset Q$?
4. Montrer que $P \cap Q$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ égal à D. En donner une base.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^5$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : 5x + 3y + z + u = y + z + t = z - u + t = 0\}.$$

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
2. Donner une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de P, où $p = \dim P$ est à préciser.
3. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^5$.