Examen – Première session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (Contraintes d'inégalités)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y,$$

qu'on étudie sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 2 \quad \& \quad y \leqslant -2x+5\}.$$

1. (a) Il suffit de poser $h_1(x,y) = 2 - xy$ et $h_2(x,y) = y + 2x - 5$.

(b) On commence par calculer les gradients des contraintes :

$$\nabla h_1(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad \& \quad \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont libres, sauf si $y = 2x$ (on remarquera que si $y \neq 2x$, alors une au moins des deux coordonnées est non nulle donc le premier vecteur n'est pas nul). Mais dans ce cas, la première contrainte donne $2x^2 = 2$ et la seconde $4x = 5$, ce qui est impossible. Autrement dit, les contraintes ne sont pas toutes deux actives. Si seule la seconde l'est, comme son gradient est non nul la qualification linéaire des contraintes est vérifiée. Si seule la première l'est, alors comme $(0,0)$ ne vérifie pas les contraintes, le gradient est non nul et la qualification linéaire des contraintes est vérifiée. Ainsi, dans tous les cas, la qualification linéaire des contraintes est vérifiée.

2. (a) Le système s'écrit, avec $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 1 & = & -\mu_1 y + 2\mu_2 \\ 1 & = & -\mu_1 x + \mu_2 \\ \mu_1(xy-2) & = & 0 \\ \mu_2(y+2x-5) & = & 0 \end{cases}$$

(b) Nous allons distinguer suivant les valeurs de μ_1 et μ_2 :

- Si $\mu_1 = 0 = \mu_2$, la première équation devient $1 = 0$, donc il n'y a pas de solution.
- Si $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, alors $y = -2x + 5$ par la seconde condition de complémentarité, ce qui en réinjectant dans la première donne $-2x^2 + 5x - 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc les solutions sont

$$x = \frac{-5 \pm 3}{-4} \quad \& \quad y = \frac{2}{x},$$

c'est-à-dire $(1/2, 4)$ et $(2, 1)$.
- Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors les deux premières équations donnent $\mu_2 = 2\mu_2$, ce qui contredit $\mu_2 \neq 0$.

- Si $\mu_2 = 0$, et $\mu_1 \neq 0$, alors les deux premières équations donnent $y = -1/\mu_1 = x$. Comme on a de plus par la première relation de complémentarité que $xy = 2$, on en déduit que $(x, y) = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. (a) Si $x, y \geqslant 0$, alors la seconde contrainte donne $0 < y \leqslant -2x + 5 \leqslant 5$. En particulier, $y \in [0; 5]$ et $x \in [0; 5/2]$, donc $\mathcal{D}_+$ est bien borné.

(b) Comme $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n| > 5$ ou $|y_n| > 5$. D'après le calcul précédent, cela implique que $(x_n, y_n) \notin \mathcal{D}_+$.

(c) Nous avons montré que pour tout $n \geqslant N$, $(x_n, y_n) \notin \mathcal{D}_+$. Or, la première contrainte impose que x et y ont même signe. Par conséquent, on a $x_n, y_n < 0$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, comme $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$, l'une au moins des deux coordonnées tend vers $-\infty$, ce qui implique que

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Alors, pas un résultat du cours démontré en TD, f admet un maximum global sur $\mathcal{D}$.

Alternativement, on peut montrer comme nous l'avons fait ci-dessus que si $(x, y) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_+$, alors $f(x, y) \leqslant 0$ et que par conséquent si f a un maximum global sur $\mathcal{D}_+$, alors il s'agit aussi d'un maximum global sur $\mathcal{D}$. On conclut alors par compacité de $\mathcal{D}_+$ et continuité de f.

(d) Comme les contraintes sont qualifiées en tout point, elles le sont au maximum global, qui doit donc être solution du système KKT avec des multiplicateurs positifs. On peut bien sûr se contenter de calculer les valeurs de f sur toutes les solutions du système KKT, mais nous allons ici calculer les multiplicateurs afin de ne retenir que ceux qui sont positifs. Calculons donc les multiplicateurs associés aux différents points critiques :

- Pour $(1/2, 4)$, on a
$$\begin{cases} 1 &= -4\mu_1 + 2\mu_2 \\ 1 &= -\mu_1/2 + \mu_2 \end{cases}$$
En multipliant la seconde équation par 2 et en soustrayant la première, on trouve $1 = 3\mu_1$ qui implique $\mu_1 = 1/3 > 0$. On en déduit
$$\mu_2 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$
- Pour $(2, 1)$, on a
$$\begin{cases} 1 &= -\mu_1 + 2\mu_2 \\ 1 &= -2\mu_1 + \mu_2 \end{cases}$$
La même manipulation donne alors $1 = -3\mu_1$ et donc $\mu_1 = -1/3 < 0$. Il ne s'agit donc pas d'un maximum.
- Pour $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, on a
$$\begin{cases} 1 &= \sqrt{2}\mu_1 \\ 1 &= \sqrt{2}\mu_1 \end{cases}$$
donc $\mu_1 = 1/\sqrt{2} > 0$. Ce point est donc également un potentiel maximum.
- Pour $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, on a
$$\begin{cases} 1 &= -\sqrt{2}\mu_1 \\ 1 &= -\sqrt{2}\mu_1 \end{cases}$$
donc $\mu_1 = -1/\sqrt{2} < 0$. Il ne s'agit donc pas d'un maximum.

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs des deux candidats que nous avons trouvés :

$$f\left(\frac{1}{2}, 4\right) = \frac{9}{2} \quad \& \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

La plus grande des deux valeurs est la première, qui est donc le maximum global recherché.

4. Posons $x_n = -n$ et $y_n = -n$. Alors, $x_n y_n = n^2 \geqslant 2$, et

$$y_n = -n \leqslant 2n + 5 = 2x_n + 5$$

donc ces points satisfont les contraintes. Comme d'autre part $f(x_n, y_n) \to -\infty$ quand $n \to \infty$, on en déduit que f n'a pas de minimum global sous contraintes.

5. Nous avons déjà vu plus haut que pour $(2, 1)$, on a $\mu_1 = -1/3$. On en déduit que

$$\mu_2 = 1 + 2\mu_1 = \frac{5}{3} > 0.$$

Les multiplicateurs n'ont pas le même signe, donc il ne s'agit pas d'un extremum local.

Exercice 2 (Optimisation linéaire). **1.** En notant x, y et z les quantités de pain, de brioche et de croissants produits, la fonction f est le revenu totale des ventes journalières. Quant aux contraintes, elles expriment les limites imposées par la quantité totale de beurre, de farine et de levure.

2. Comme $x, y, z \geqslant 0$, la première contrainte donne $0 \leqslant x \leqslant 11$, $0 \leqslant y \leqslant 22$ et $0 \leqslant z \leqslant 11/2$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est borné. Comme il est de plus fermé car défini par des inégalités larges, il est compact. La fonction f est continue car linéaire sur $\mathcal{D}$ qui est compact, donc elle admet un maximum global.

3. (a) Comme x et z sont non-nulles, le sommet appartient à deux des plans définis par les trois premières contraintes. Autrement dit, deux équations parmi les suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} 2x + 4z &= 22 \\ 6z &= 20 \\ 2x + 6z &= 34 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $(x, z) = (13/3, 10/3)$ et les deux dernières donnent $(x, z) = (7, 10/3)$. Quant à la première et la dernière, elles donnent $z = 6$ et donc $x = -1$, ce qui n'est pas possible. Le point $(13/3, 0, 10/3)$ vérifie bien les contraintes, par contre le point $(7, 0, 10/3)$ ne vérifie pas la première contrainte :

$$2 \times 7 + \frac{40}{3} > 22.$$

(b) On procède comme à la question précédente, excepté que cette fois le système est

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 22 \\ 2y &= 20 \\ 2x + 3y &= 34 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $(x, y) = (1, 10)$ et les deux dernières donnent $(x, y) = (2, 10)$. Quant à la première et la dernière, elles donnent $y = 12$ et donc $x = -1$, ce qui n'est pas possible. Le point $(1, 10, 0)$ vérifie bien les contraintes, par contre le point $(2, 10, 0)$ ne vérifie pas la première contrainte :

$$2 \times 2 + 2 \times 10 > 22.$$

(c) Cette fois, les équations sont

$$\begin{cases} 2y + 4z &= 22 \\ 2y + 6z &= 20 \\ 3y + 6z &= 34 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $z = -1$, ce qui est impossible. Les deux dernières donnent $y = 14$ et donc $6z = -8$, ce qui est impossible. Quant à la première et la dernière, elles donnent $0 = -2$, ce qui est absurde.

4. Si une fonction linéaire admet un extremum global sous contraintes linéaires, alors ce maximum est atteint en un sommet de l'ensemble des points vérifiant les contraintes.

5. Il suffit de comparer les valeurs de f aux différents points trouvés précédemment. On a

$$f\left(\frac{13}{3}, 0, \frac{10}{3}\right) = 130 + \frac{400}{3} = \frac{790}{3}$$
$$f(1, 10, 0) = 30 + 400 = 430.$$

La plus grande valeur est la dernière, donc le maximum vaut 430 et est atteint en produisant 1 unité de pain, 10 unités de brioche et aucun croissant.

6. Nous allons procéder en distinguant le nombre de coordonnées qui peuvent être nulles. Rappelons qu'un sommet est l'intersection d'au moins trois plans, donc que trois au moins des inégalités doivent être des égalités. Ainsi, si $x, y, z \neq 0$, alors on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y + 4z & = & 22 \\ 2y + 6z & = & 20 \\ 2x + 3y + 6z & = & 34 \end{array}\right.$$

En soustrayant la première ligne à la troisième, on trouve $y + 2z = 12$. En soustrayant deux fois cette équation à la seconde du système, on obtient alors $2z = -4$, ce qui contredit $z \geqslant 0$. Il n'y a donc pas de sommet dont toutes les coordonnées sont positives.

Nous avons déjà trouvé tous les sommets ayant une seul coordonnée nulle, nous alons donc maintenant traiter les sommets ayant exactement deux coordonnées nulles.

- Si $x = 0 = y$, alors on doit avoir une égalité parmi les inégalités

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4z & \leqslant & 22 \\ 6z & \leqslant & 20 \\ 6z & \leqslant & 34 \end{array}\right.$$

  La seule possibilité est $z = 20/6 = 10/3$.
- Si $x = 0 = z$, alors on doit avoir une égalité parmi les inégalités

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y & \leqslant & 22 \\ 2y & \leqslant & 20 \\ 3y & \leqslant & 34 \end{array}\right.$$

  La seule possibilité est $y = 10$.
- Si $y = 0 = z$, alors on doit avoir une égalité parmi les inégalités

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x & \leqslant & 22 \\ 0 & \leqslant & 20 \\ 2x & \leqslant & 34 \end{array}\right.$$

  La seule possibilité est $x = 22/2 = 11$.

Ainsi, nous avons trouvé trois sommets : $(0, 0, 10/3)$, $(0, 10, 0)$ et $(11, 0, 0)$.

Il reste le cas où les trois coordonnées sont nulles, qui vérifie bien les contraintes et donne donc le dernier sommet. Pour terminer, il faut simplement calculer la valeur de f sur chaque sommet :

$$f\left(0, 0, \frac{10}{3}\right) = \frac{400}{3}$$
$$f\left(0, 10, 0\right) = 400$$
$$f\left(11, 0, 0\right) = 330$$
$$f(0, 0, 0) = 0$$

Toutes ces quantités sont inférieures à 430, donc on avait bien trouvé le maximum.

Exercice 3 (Optimisation convexe)**.** On considère les fonctions $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \& \quad h(x,y,z) = x + y^2 + z^2 + 2.$$

1. Il suffit pour cela de calculer leurs Hessiennes. On a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \& \quad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En particulier, H_f est définie positive en tout point, donc f est (strictement) convexe. On a également

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \& \quad H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En particulier, H_h est positive en tout point, donc h est convexe.

2. On cherche à minimiser f sous la contrainte $h \leqslant 0$.

(a) Comme la première coordonnée de $\nabla h(x,y,z)$ n'est jamais nulle, la qualification linéaire des contraintes est toujours satisfaite.

(b) On cherche les points de coordonnées (x,y,z) pour lesquels il existe $\mu \leqslant 0$ tel que

$$\begin{cases} 2x & = & \mu \\ 2y & = & 2\mu y \\ 2z & = & 2\mu z \\ \mu(x + y^2 + z^2 + 2) & = & 0 \end{cases}$$

Si $\mu = 0$, alors $x = y = z = 0$ et la contrainte n'est pas vérifiée. Par conséquent, $\mu < 0$. Si $y \neq 0$ ou $z \neq 0$, alors $\mu = 1$, ce qui contredit $\mu < 0$. Ainsi, $y = 0 = z$ et la relation de complémentarité donne alors $x + 2 = 0$, c'est-à-dire $x = -2$. On en déduit que $\mu = -4$ et on a donc trouvé le seul point critique sous contrainte.

(c) D'après le cours, comme le problème est convexe, tout point critique sous contrainte est un minimum global. Ainsi, le minimum de f sous la contrainte est atteint en $(-2,0,0)$ et vaut $f(-2,0,0) = 4$.

3. Pour trouver le problème dual, il faut partir du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,y,z,\mu) &= x^2 + y^2 + z^2 - \mu(x + y^2 + z^2 + 2) \\ &= x^2 - \mu x - 2\mu + y^2(1-\mu) + z^2(1-\mu) \end{aligned}$$

qu'il faut minimiser par rapport à (x,y,z). On peut remarquer que

$$\mathcal{L}(x,y,z,\mu) \geqslant x^2 - \mu x - 2\mu$$

avec égalité si $y = 0 = z$. Ainsi, il suffit de minimiser le membre de droite. Le minimum du trinôme est atteint en $x = \mu/2$. Ainsi, la fonction duale est

$$\begin{aligned} f^*(\mu) &= \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \mu\left(\frac{\mu}{2}\right) - 2\mu \\ &= \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{2} - 2\mu \\ &= -\frac{\mu^2}{4} - 2\mu \end{aligned}$$

qu'on doit cette fois maximiser sous la seule contrainte $\mu \leqslant 0$.

4. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Soient également $g_1, \cdots, g_m : U \to \mathbb{R}$ des fonctions affines et $h_1, \cdots, h_p : U \to \mathbb{R}$ des fonction convexes de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

- Il existe $\widehat{x} \in \mathcal{D}$ tel que $h_j(\widehat{x}) < 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$;
- Le point 0 est intérieur à $g(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Alors, il existe $\widetilde{x} \in \mathcal{D}$, $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ et $\widetilde{\mu} \in \mathbb{R}^p_-$ tels que

$$\boxed{f(\widetilde{x}) = \mathcal{L}(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) = f^*(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})}$$

En particulier, f admet un minimum global sous contraintes et les multiplicateurs correspondants donnent un maximum global sous contrainte du problème dual.

5. Le maximum de f^* est atteint en $\mu = -4$ et vaut 4. On peut le montrer directement (il s'agit d'une fonction du second degré) ou vérifier que le Théorème de Slater s'applique. Pour cela, la seule hypothèse à vérifier (il n'y a pas de contraintes d'égalité) est qu'il existe (x, y, z) tel que $h(x, y, z) < 0$, et le point $(-4, 0, 0)$ convient.