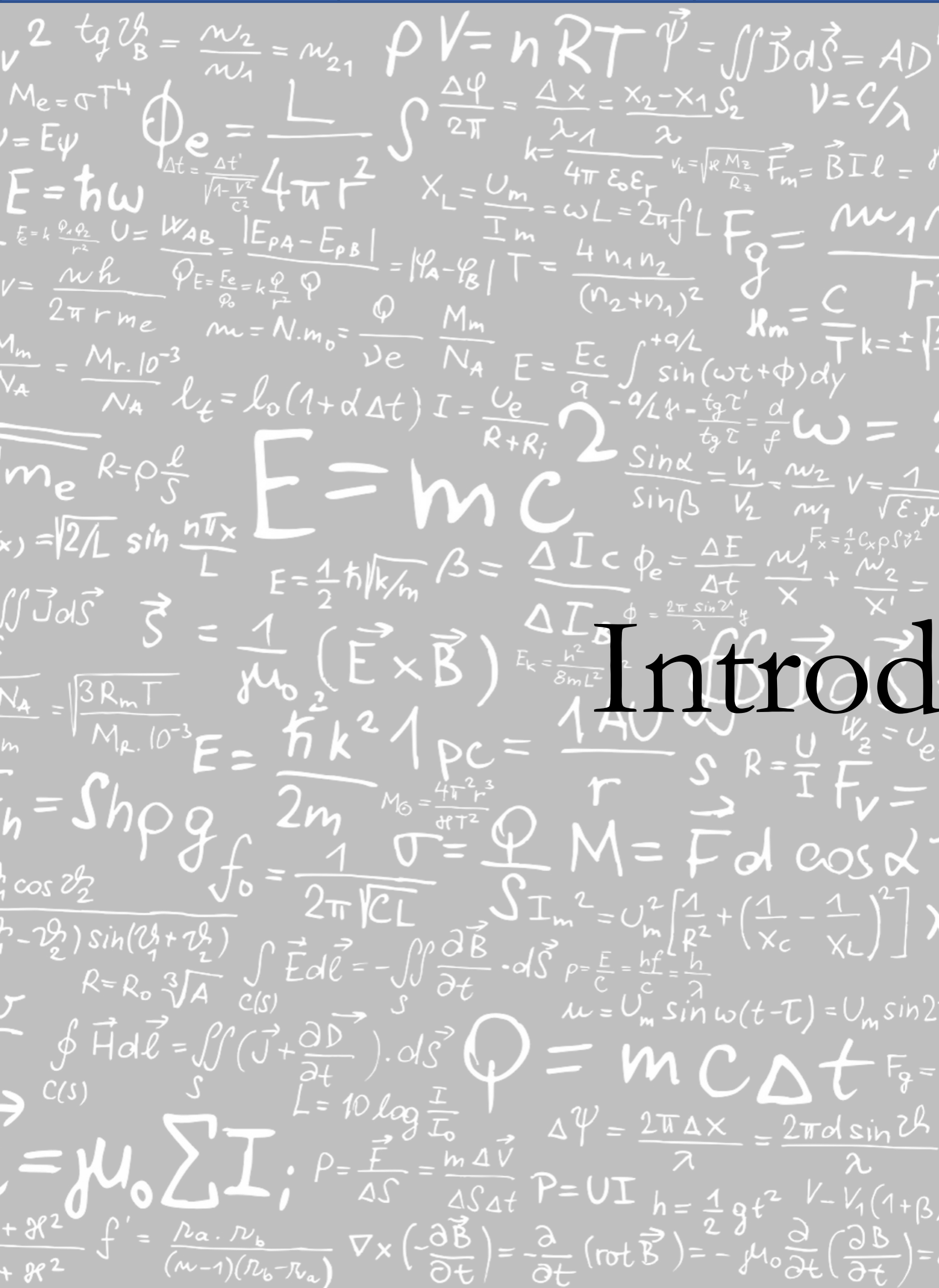
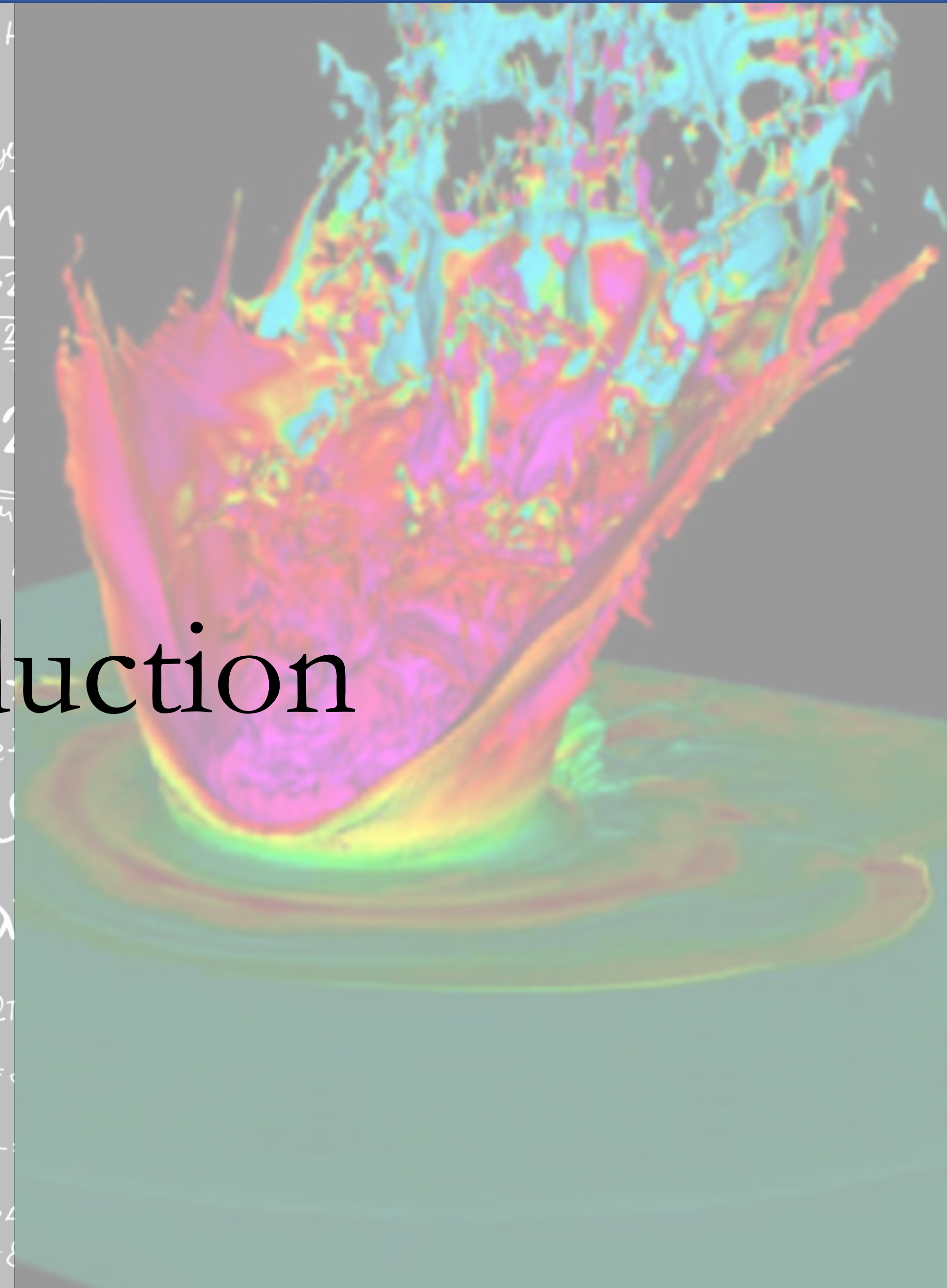
Méthodes Numériques

Cours 7 :

Passage au 2D

Dr. Barbara PERRI
barbara.perri@universite-paris-saclay.fr





Introduction

Plan de l'UE

Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2
4 Décembre : Cours 3 + TP
5 Décembre : Cours 4 + TP
12 Décembre : Cours 5 + TP
19 Décembre : Cours 6 + TP
9 Janvier : **Cours 7** + TP
16 Janvier : Cours 8 + TP
23 Janvier : TP
30 Janvier : Examen

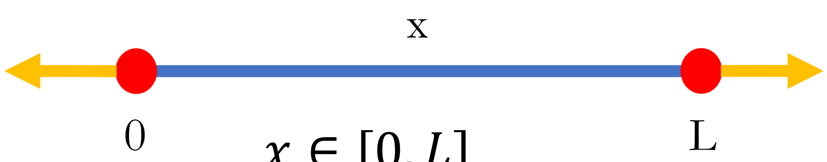
Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)

Hypothèse : 1D

Pour cette première application, on ne va s'intéresser qu'à des problèmes à 1 dimension :

Domaines sous forme de segments



$x \in [0, L]$

δD : 2 points

Gauche : $x = 0$

Droite : $x = L$

Cela permet de simplifier l'écriture du problème dans un premier temps

Équations différentielles ordinaires (EDO)

= les inconnues ne dépendent que d'une seule variable

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = g(x)$$

MAIS la même méthode sera généralisable aux EDPs

Cycle des méthodes numériques : Stationnaire

Équation(s) = équations + domaine + conditions aux limites

Définition du problème = discrétisation spatiale + maillage

Discrétisation du domaine = choix du schéma + formulation sur les bords

Discrétisation des équations = ramener le problème à une inversion de matrice

Écriture matricielle = implémentation en python

Programmation

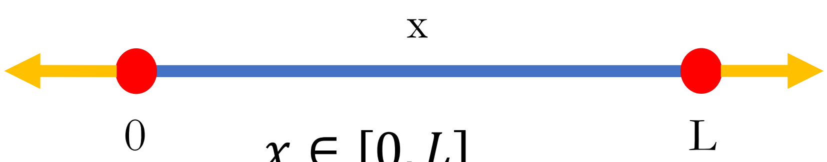
(validation)

Solution numérique

Hypothèse : 1D instationnaire

Pour cette première application, on ne va s'intéresser qu'à des problèmes à 1 dimension **spatiale** :

Domaines sous forme de segments



$x \in [0, L]$

δD : 2 points

Gauche : $x = 0$

Droite : $x = L$

Cela permet de simplifier l'écriture du problème dans un premier temps

Équations différentielles ordinaires (EDP)

= les inconnues ne dépendent que d'une seule variable **spatiale** + **temps**

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = g(x,t)$$

On ne peut plus appliquer les méthodes propres aux EDOs !

Cycle des méthodes numériques : Instationnaire

Équation(s)

+ condition initiale

Définition du problème

discrétisation spatiale +
discrétisation temporelle

Discrétisation du domaine

+ discrétisation temporelle +
analyse de stabilité (explicite)

Discrétisation des équations

+ équation matricielle

Écriture matricielle

+ boucle temporelle

(validation)

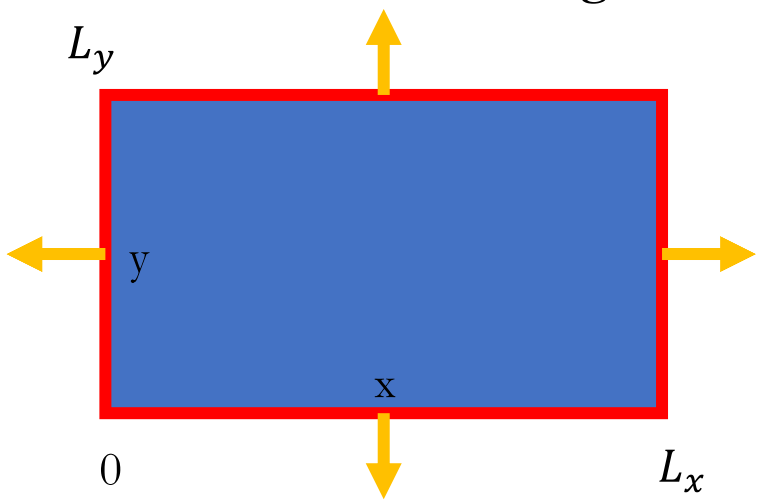
Programmation

Solution numérique

Hypothèse : 2D

On va enfin passer à des problèmes en 2 dimensions :

Domaines sous forme de rectangles



δD : Union de 4 segments

Bas : $(x, 0), \forall x \in [0, L_x]$

Haut : $(x, L_y), \forall x \in [0, L_x]$

Gauche : $(0, y), \forall y \in [0, L_y]$

Droite : $(0, L_x), \forall y \in [0, L_y]$

Équations aux dérivées partielles (EDP)

= les inconnues dépendent maintenant de **2 variables spatiales**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$$

Il faut toujours préciser selon quelle dimension on dérive (croisée ?)

Hypothèse : Problèmes stationnaires

On rajoute l'hypothèse supplémentaire que les dérivées étudiées sont forcément par rapport à l'espace et non au temps :

⬇

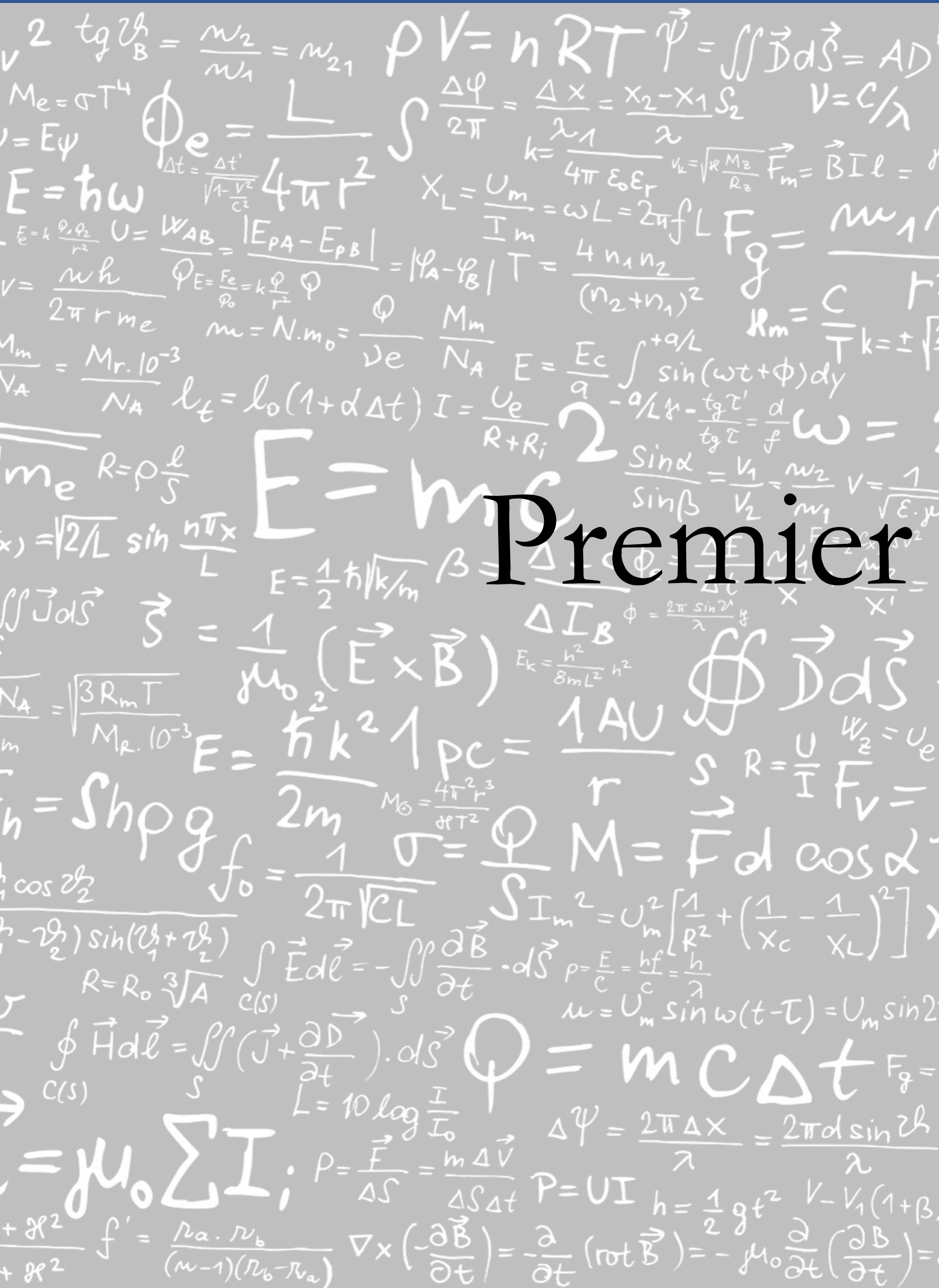
Cela permet de se concentrer d'abord sur les conditions aux limites (avant d'ajouter la condition initiale)

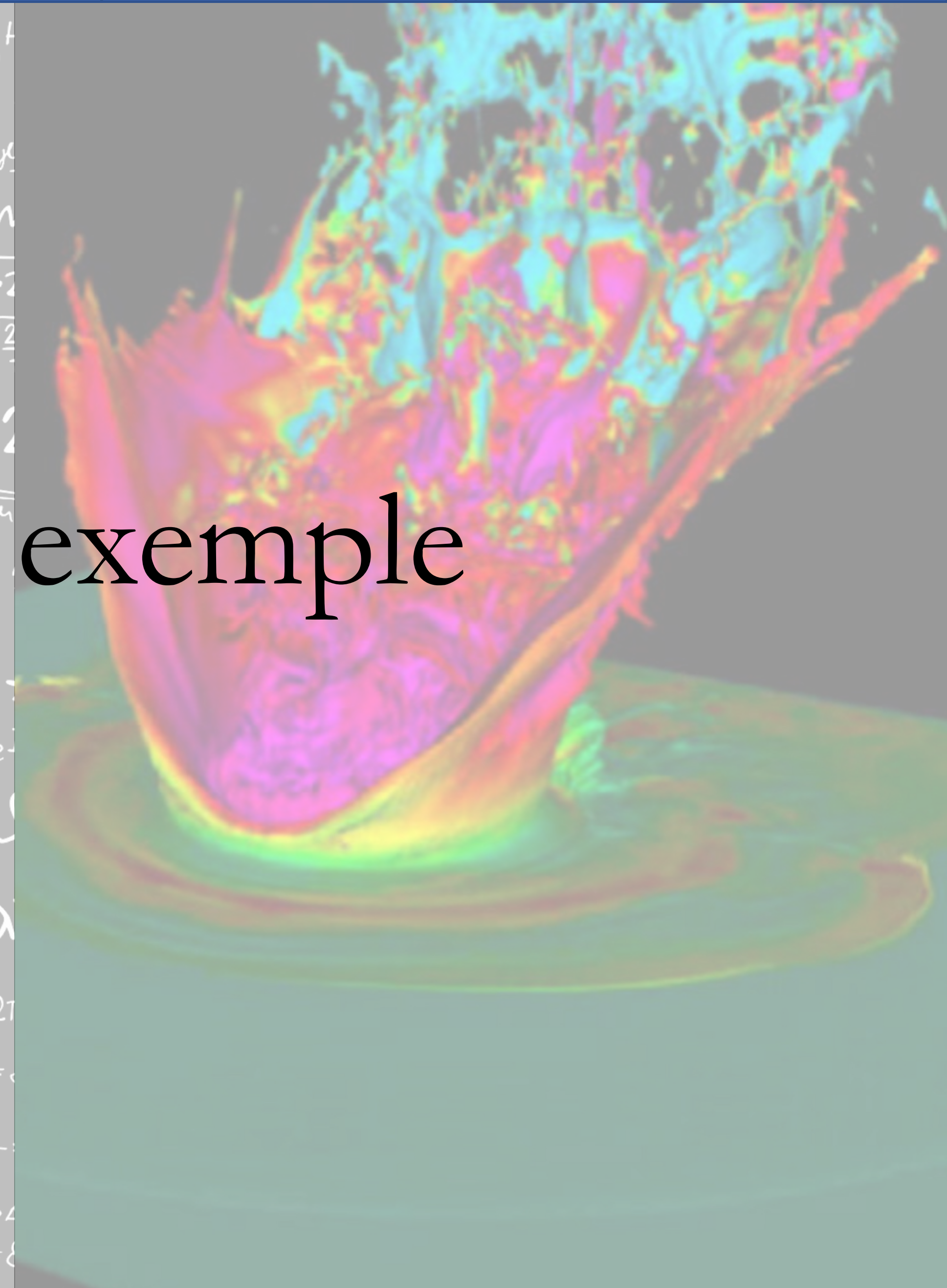
+

Cela permet d'obtenir une seule solution finale stationnaire (pas d'évolution temporelle) → plus facile à valider

⬇

La dimension temporelle sera ajoutée au 2D au semestre prochain !





Premier exemple

Étape 1 : Définition du problème

1

Avant de passer à la partie numérique, il faut s'assurer d'avoir bien défini le problème physique/mathématique continu

Premier exemple :
Problème de Poisson en 2D

Équation : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y)$$ (problème de Poisson)

Inconnue : $f(x,y)$ (fonction réelle **2D**)

Domaines : $x \in [0, L_x]$ $y \in [0, L_y]$ (**rectangle 2D**)

Condition aux limites :

$$f(x,0) = C_{sud}(x)$$
$$f(x,L_y) = C_{nord}(x)$$
$\forall x \in [0, L_x]$

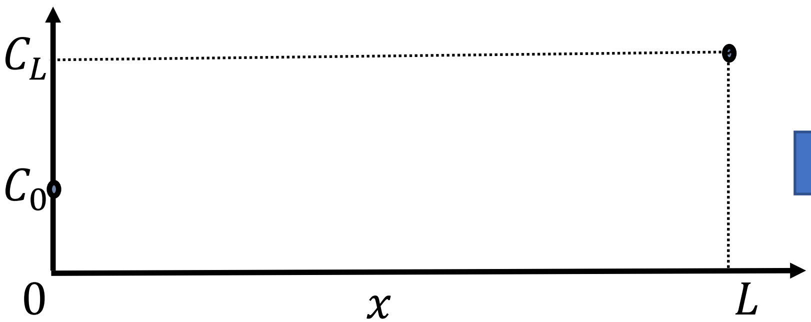
(**CL de type Dirichlet**)

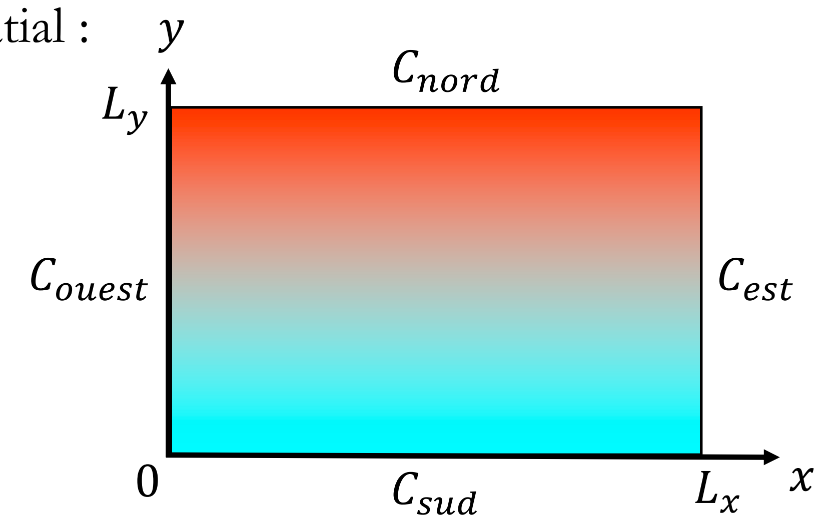
$$f(0,y) = C_{ouest}(y)$$
$$f(L_x,y) = C_{est}(y)$$
$\forall y \in [0, L_y]$

1

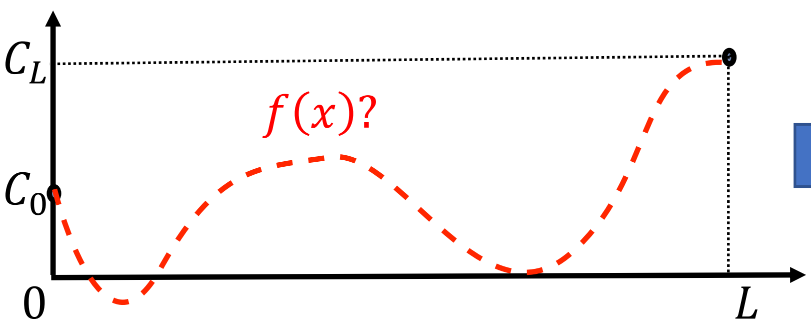
Visualisation des domaines

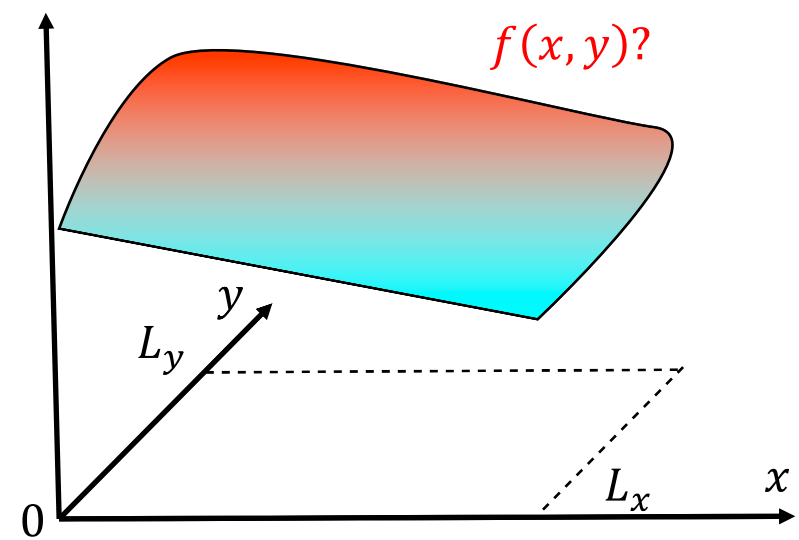
Domaine spatial :





Fonction définie sur le domaine spatial :





Étape 2 : Discrétisation du domaine

2

On va maintenant passer d'un milieu continu à discret à l'aide d'un maillage :

<u>Premier exemple :</u>

Problème de Poisson en 2D + Maillage uniforme

Nombres de points : $\boldsymbol{N = (M_x + 1)(M_y + 1)}$ **en espace**

Pas d'espace : $\delta x = L_x / M_x$ $\qquad$ $\boldsymbol{\delta y = L_y / M_y}$

(résolution)

Numérotation : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{M_x} = L_x$

$\boldsymbol{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M_y} = L_y}$

(noeuds du maillage spatial)

Équivalence discret/continu : $\boldsymbol{f(x_i, y_j) = f_{i,j}}$ (notation)

Valeurs nodales connues : $\boldsymbol{g(x_i, y_j) = g_{i,j}}$

Valeurs nodales inconnues : $\boldsymbol{f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, \dots, f_{0,M_y}}$

(valeurs aux noeuds)

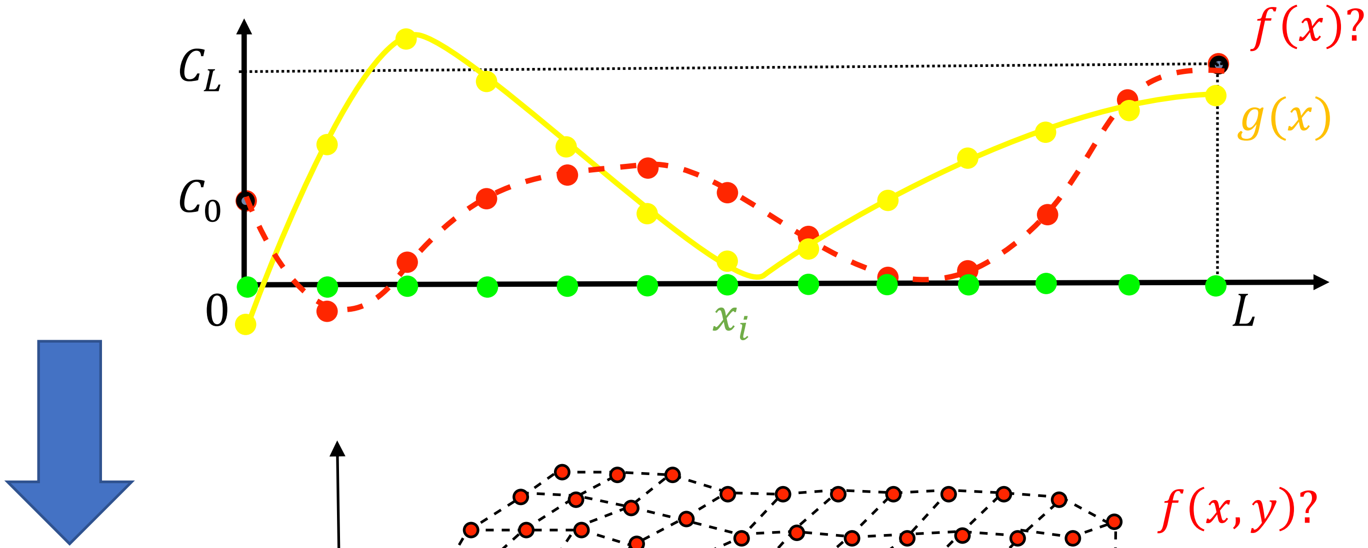
$\boldsymbol{\dots}$

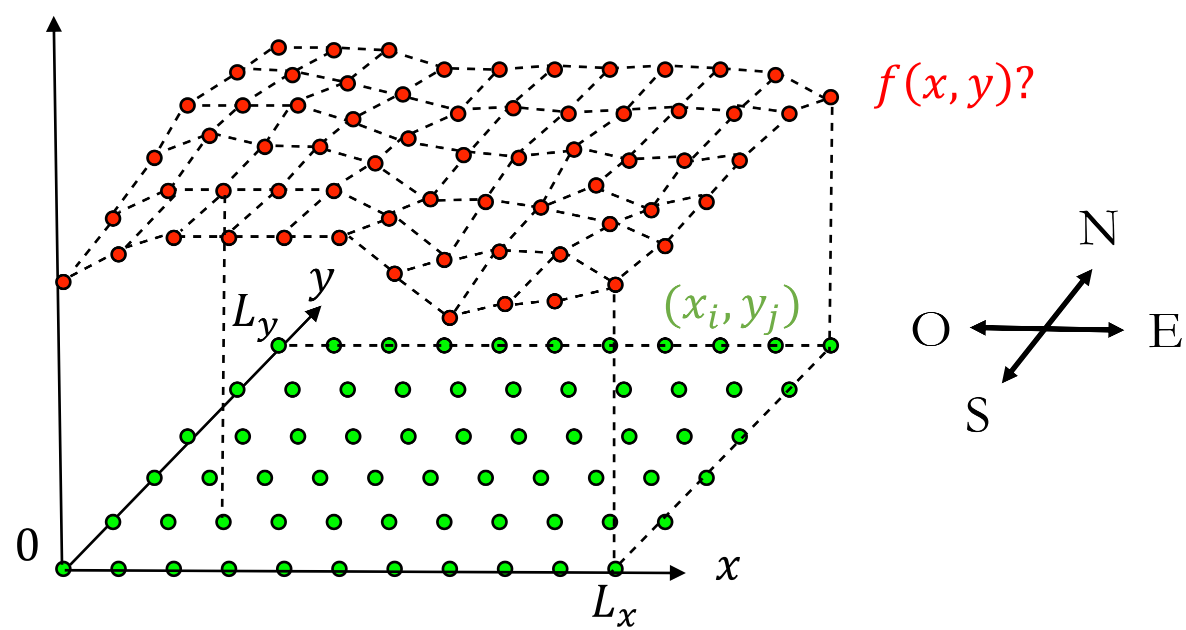
$\boldsymbol{f_{M_x,0}, f_{M_x,1}, f_{M_x,2}, \dots, f_{M_x,M_y}}$

2

Visualisation des maillages

Discrétisation :





Difficultés en 2D

2

On voit tout de suite que le nombre de points à gérer
est beaucoup plus important qu'en 1D :

Totalité des points : $N = (M_x + 1)$ → $N = (M_x + 1)(M_y + 1)$

Sur les bords : $N_{bord} = 2$ → $N_{bord} = 2M_x + 2M_y$

Exemple : $M_x = 100$

<u>1D :</u>
101 points en tout
2 points sur les bords

<u>2D :</u>
10 201 points en tout
404 points sur les bords

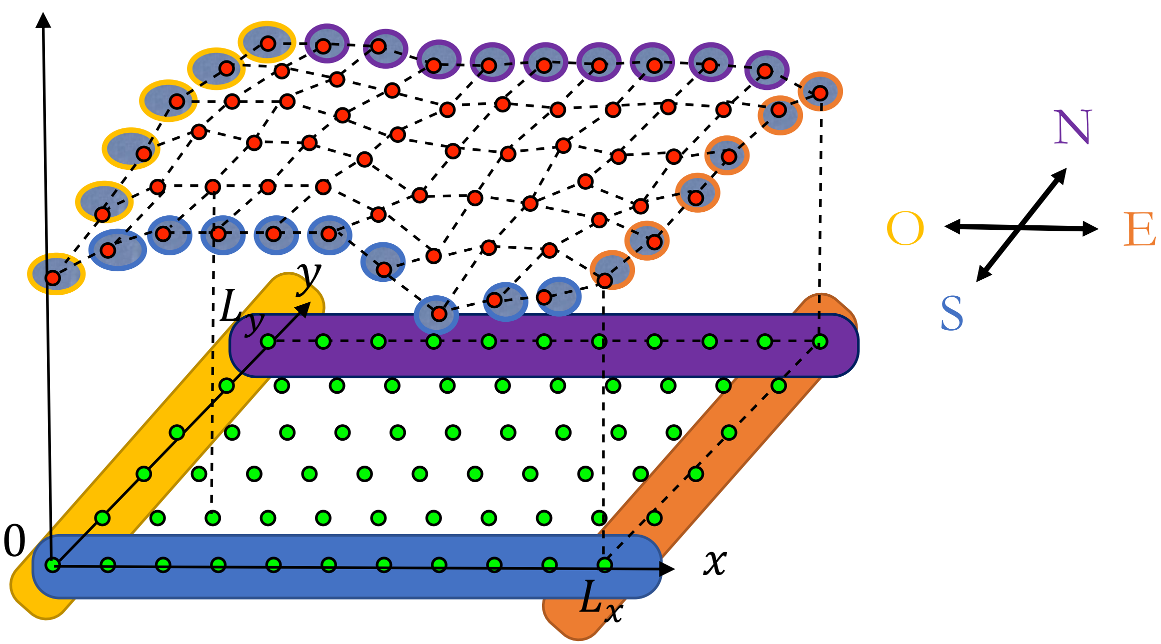
→ Augmenter la résolution est tout de suite beaucoup plus coûteux !

Étape 3 : Discrétisation des équations (bords)

3

Une fois qu'on a discrétisé le domaine de calcul et les quantités physiques,
il faut encore choisir comment approximer les dérivées = choix du schéma numérique

→ Le but est d'arriver à avoir une équation algébrique à résoudre
pour chaque point du maillage :



$f_{i,0} = C_{sud}(x_i)$

$f_{i,M_y} = C_{nord}(x_i)$

$\forall i = 1, \ldots, M_x - 1$

$f_{0,j} = C_{ouest}(y_j)$

$f_{M_x,j} = C_{est}(y_j)$

$\forall j = 1, \ldots, M_y - 1$

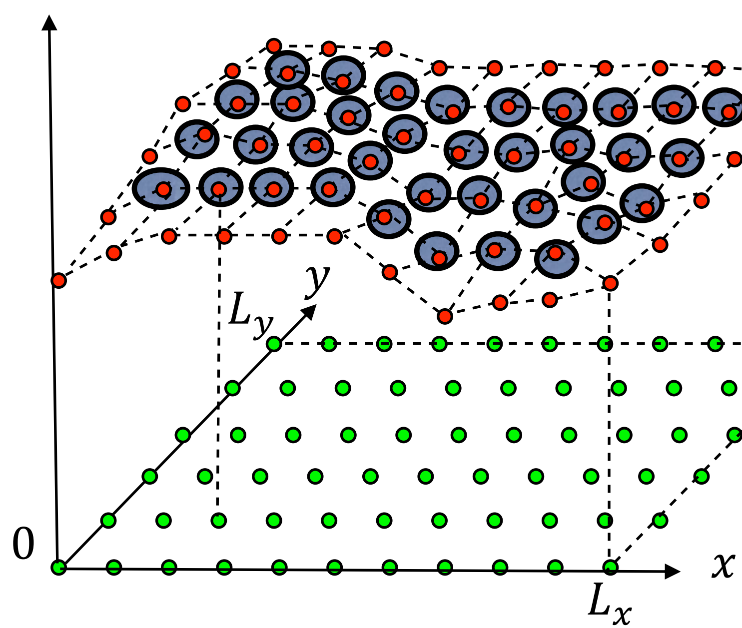
→ en 2D, $2M_x + 2M_y$ équations en tout pour les bords du domaine

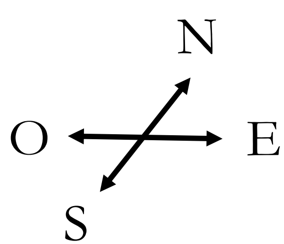
Étape 3 : Discrétisation des équations (domaine)

3

Une fois qu'on a discrétisé le domaine de calcul et les quantités physiques,
il faut encore choisir comment approximer les dérivées = choix du schéma numérique

→ Le but est d'arriver à avoir une équation algébrique à résoudre
pour chaque point du maillage :





$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = g_{i,j}$$

$$\forall i = 1, \dots, M_x - 1$$

$$\forall j = 1, \dots, M_y - 1$$

→ en 2D, $(M_x - 1)(M_y - 1)$ équations en tout pour l'intérieur du domaine

Étape 3 : Discrétisation des équations (domaine)

3

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

On cherche à discrétiser l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = g_{i,j}$$

Discrétisation spatiale : Centrée (maillage uniforme)

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta x^2} \qquad \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\delta y^2}$$

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2} = g_{i,j}$$

$$\forall i \in [1, M_x - 1], \forall j \in [1, M_y - 1]$$

Étape 4 : Écriture matricielle (principe) (I)

4

Comme en 1D, on aimerait arriver à mettre le système sous la forme suivante : $AF = G$

→ Mais si on écrit le système linéaire, on constate vite qu'il est très différent :

(x_0, y_1) : $f_{0,1} = C_{ouest}(x_0)$

(x_1, y_1) : $\dfrac{f_{2,1} - 2f_{1,1} + f_{0,1}}{\delta x^2} + \dfrac{f_{1,2} - 2f_{1,1} + f_{1,0}}{\delta y^2} = g_{1,1}$

(x_2, y_1) : $\dfrac{f_{3,1} - 2f_{2,1} + f_{1,1}}{\delta x^2} + \dfrac{f_{2,2} - 2f_{2,1} + f_{2,0}}{\delta y^2} = g_{2,1}$

… : …

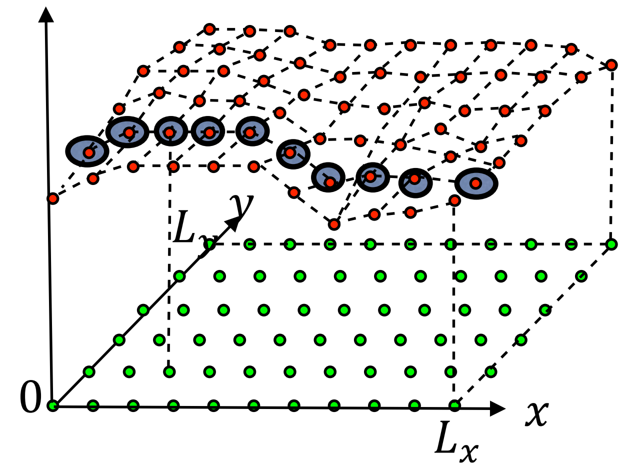
(x_i, y_1) : $\dfrac{f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}}{\delta x^2} + \dfrac{f_{i,2} - 2f_{i,1} + f_{i,0}}{\delta y^2} = g_{i,1}$

… : …

(x_{M_x-1}, y_1) : $\dfrac{f_{M_x,1} - 2f_{M_x-1,1} + f_{M_x-2,1}}{\delta x^2} + \dfrac{f_{M_x-1,2} - 2f_{M_x-1,1} + f_{M_x-1,0}}{\delta y^2} = g_{M_x-1,1}$

(x_{M_x}, y_1) : $f_{M,1} = C_{est}(x_{M_x})$

Et ainsi de suite pour tous les y_j !

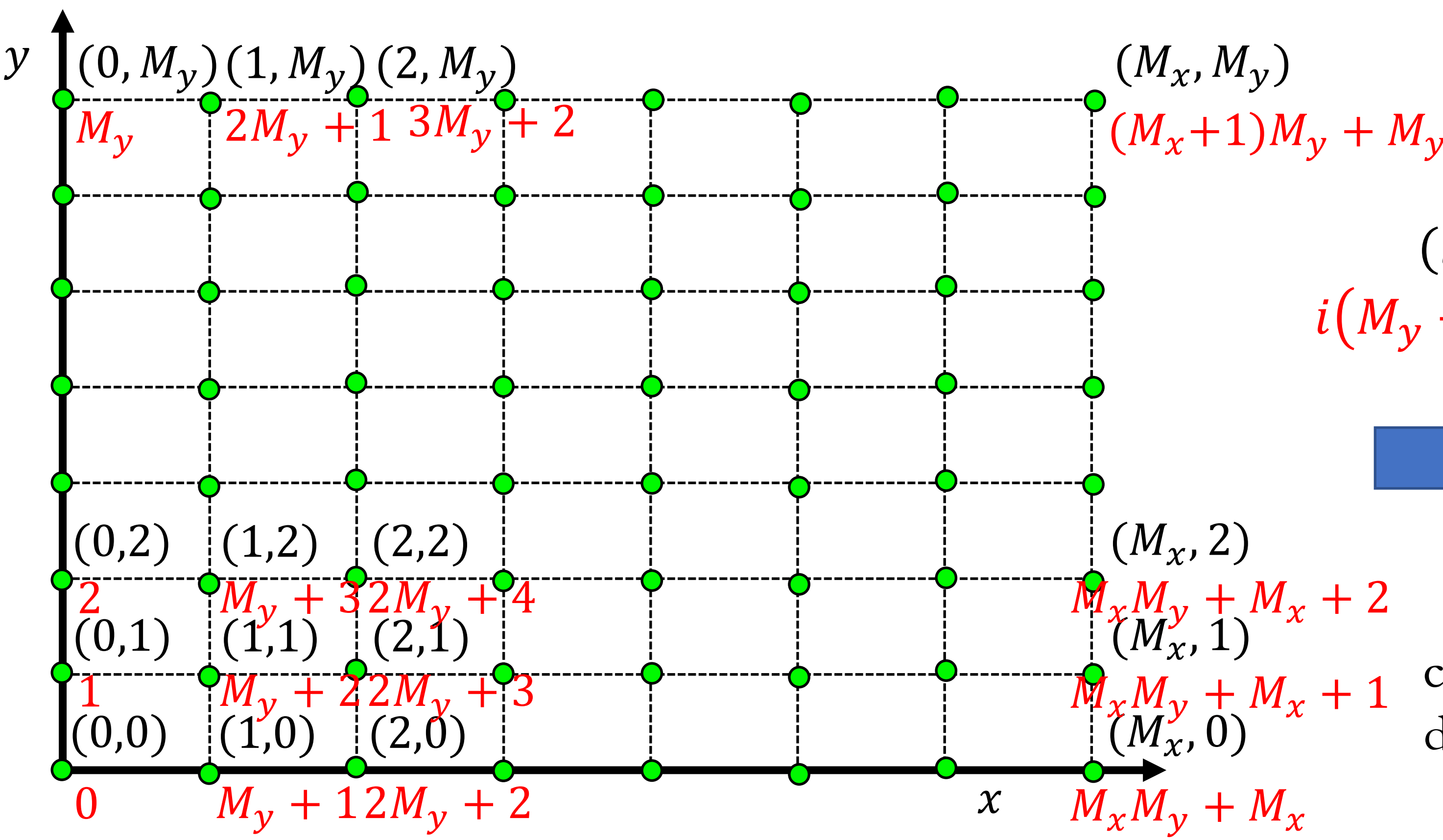


→ En 2D, il faut introduire un nouveau système de numérotation des points

Étape 4 : Écriture matricielle (principe) (II)

4

Même si on a deux indices pour représenter la position de chaque point, on va faire en sorte de n'avoir qu'un seul vecteur colonne F :



(i,j)

$i(M_y+1)+j$

Vecteur colonne F de taille N

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}$$

→ C'est un choix de numérotation arbitraire, il en existe d'autres

Étape 4 : Écriture matricielle (exercice)

4

$$\begin{array}{c} (i,j) \\ {\color{red} i\left(M_y+1\right)+j} \end{array} \begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}$$

Construire le vecteur F
avec la relation entre les deux systèmes de numérotation :

1. Pour une grille 3x3,
2. Pour une grille 4x4.

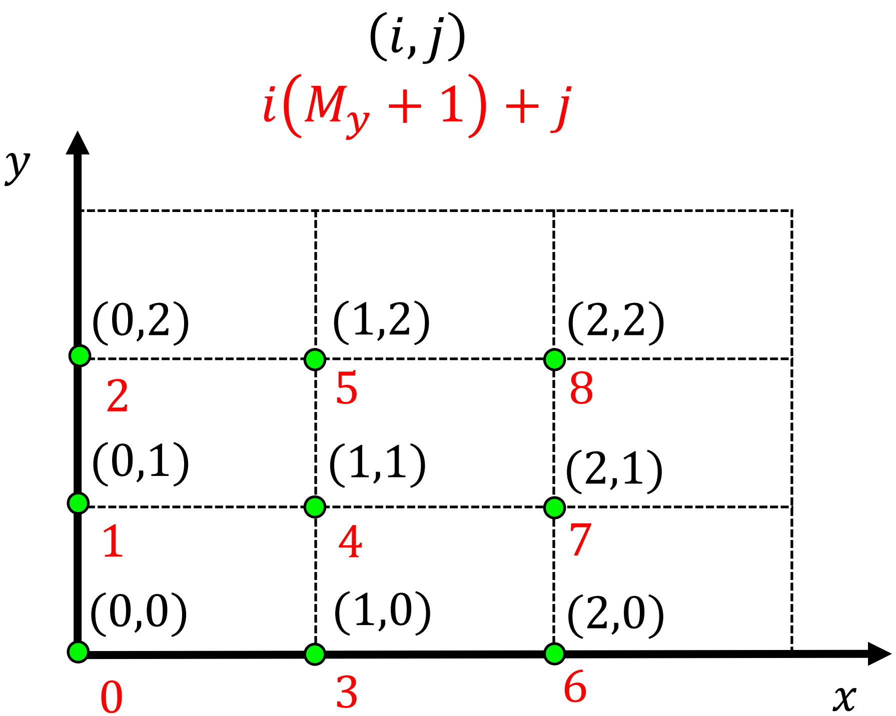
Étape 4 : Écriture matricielle (corrigé)

4

Construire le vecteur F

avec la relation entre les deux systèmes de numérotation :

1. Pour une grille 3x3.



$M_x = 2$

$M_y = 2$

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ f_{0,2} \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,0} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \end{bmatrix}$$

Étape 4 : Écriture matricielle (corrigé)

4

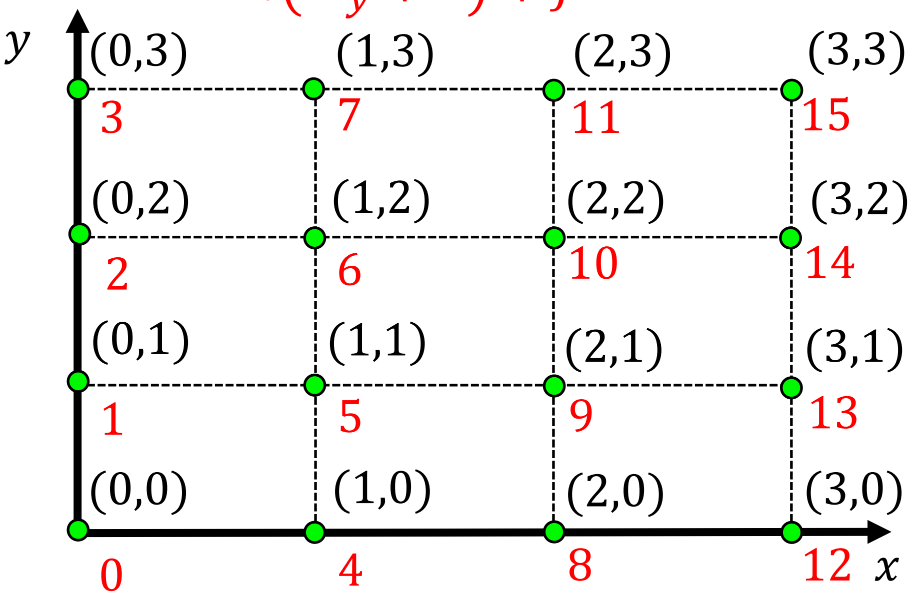
Construire le vecteur F

avec la relation entre les deux systèmes de numérotation :

2. Pour une grille 4x4.

(i,j)

$i(M_y+1)+j$



$M_x = 3$

$M_y = 3$

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ f_{0,2} \\ f_{0,3} \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,0} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ f_{3,0} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{bmatrix}$$

Étape 4 : Écriture matricielle (complète) (I)

4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

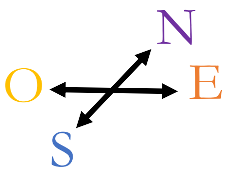
$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

$$\begin{array}{ll}
(x_0,y_1) & \left[\begin{array}{l}
f_{0,1}=C_{ouest}(x_0) \\
\dfrac{f_{2,1}-2f_{1,1}+f_{0,1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{1,2}-2f_{1,1}+f_{1,0}}{\delta y^2}=g_{1,1} \\
\dfrac{f_{3,1}-2f_{2,1}+f_{1,1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{2,2}-2f_{2,1}+f_{2,0}}{\delta y^2}=g_{2,1} \\
\dots \\
\dfrac{f_{i+1,1}-2f_{i,1}+f_{i-1,1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{i,2}-2f_{i,1}+f_{i,0}}{\delta y^2}=g_{i,1} \\
\dots \\
\dfrac{f_{M_x,1}-2f_{M_x-1,1}+f_{M_x-2,1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{M_x-1,2}-2f_{M_x-1,1}+f_{M_x-1,0}}{\delta y^2}=g_{M_x-1,1} \\
f_{M,1}=C_{est}(x_{M_x})
\end{array}\right. \\
(x_1,y_1) & \\
(x_2,y_1) & \\
\dots & \\
(x_i,y_1) & \\
\dots & \\
(x_{M_x-1},y_1) & \\
(x_{M_x},y_1) &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}$$

→ Sous quelle forme matricielle va-t-on pouvoir mettre le problème ?

Étape 4 : Écriture matricielle (complète) (II)

4



Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$(0,0)$ 1
$(0,1)$ 2
$\dots$
$(0, M_y)$ M_y
$(1,0)$ $M_y + 1$
$(1,1)$ $M_y + 2$
$\dots$
$(0, M_y)$ $2M_y + 1$
$\dots$
$\dots$
$(M_x, 0)$ $M_x(M_y + 1)$
$(M_x, 1)$ $M_x(M_y + 1) + 1$
$\dots$
(M_x, M_y) $(M_x+1)(M_y + 1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
F_0 & F_1 & \dots & F_{M_x-1} & F_{M_x} \\
\hline
B_{0,0} & B_{0,1} & \dots & B_{0,M_x-1} & B_{0,M_x} \\
B_{1,0} & B_{1,1} & \dots & B_{1,M_x-1} & B_{1,M_x} \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & \ddots & \ddots & B_{M_x,M_x}
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}
\begin{array}{c} F_0 \\ \\ F_1 \\ \\ \\ F_{M_x} \end{array}
=
\begin{array}{c} G_0 \\ \\ G_1 \\ \\ \\ G_{M_x} \end{array}
\begin{bmatrix} C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \dots \\ C_{M_y}^{ouest} \\ -- \\ C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \dots \\ C_1^{nord} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \dots \\ C_{M_y}^{est} \end{bmatrix}
$$

Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (I)

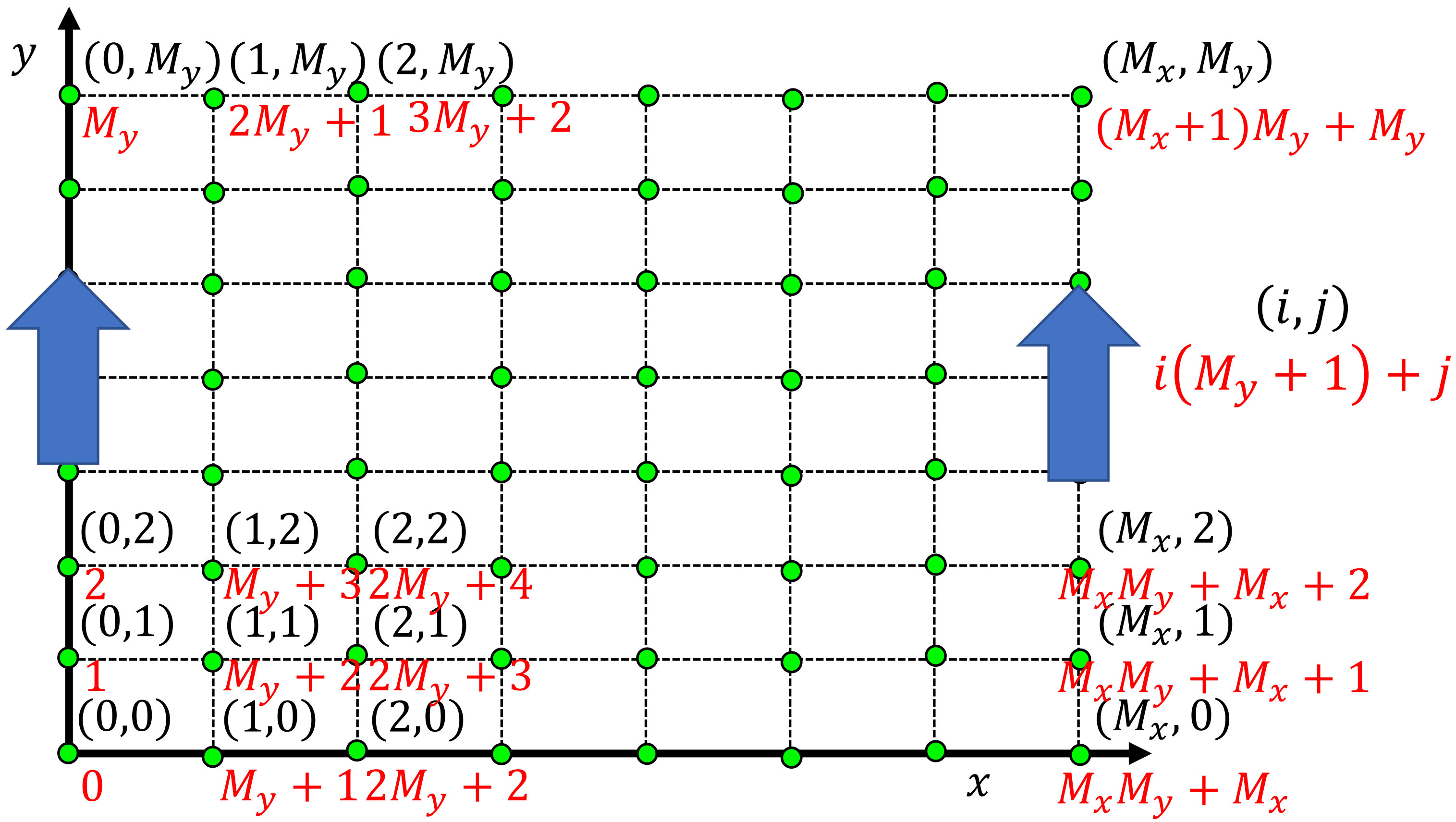
4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

Bords :
(ouest et est)



Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (II)

4

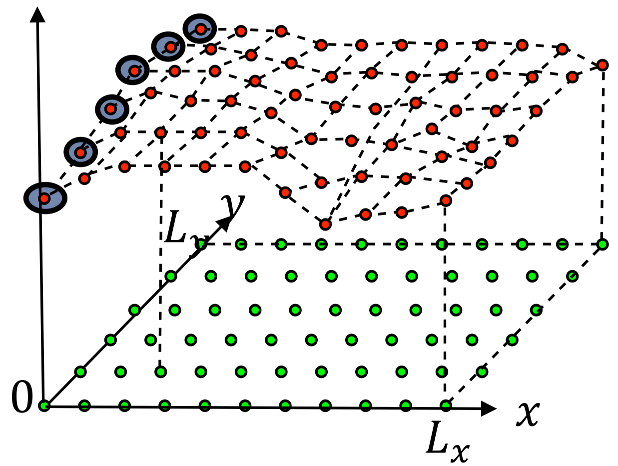
Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

Bords :
(ouest)

$$\begin{array}{rl}
(x_0, y_0) & \left[\begin{array}{l}
f_{0,0} = C_{ouest}(y_0) = C_0^{ouest} \\
f_{0,1} = C_{ouest}(y_1) = C_1^{ouest} \\
f_{0,2} = C_{ouest}(y_2) = C_2^{ouest} \\
\quad\quad\dots \\
f_{0,j} = C_{ouest}(y_j) = C_j^{ouest} \\
\quad\quad\dots \\
f_{0,M_y-1} = C_{ouest}\left(y_{M_y-1}\right) = C_{M_y-1}^{ouest} \\
f_{0,M_y} = C_{ouest}\left(y_{M_y}\right) = C_{M_y}^{ouest}
\end{array}\right. \\
(x_0, y_1) & \\
(x_0, y_2) & \\
\dots & \\
(x_0, y_j) & \\
\dots & \\
(x_0, y_{M_y-1}) & \\
(x_0, y_{M_y}) &
\end{array}$$



Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (III)

4

<u>Premier exemple :</u>

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

Première colonne

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,j} \\ \dots \\ f_{0,M_y-1} \\ f_{0,M_y} \end{bmatrix} = F_0$$

Membre de droite

$$\begin{bmatrix} C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \dots \\ C_j^{ouest} \\ \dots \\ C_{M_y-1}^{ouest} \\ C_{M_y}^{ouest} \end{bmatrix} = G_0$$

$$B_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_0 = G_0$$

Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (IV)

4

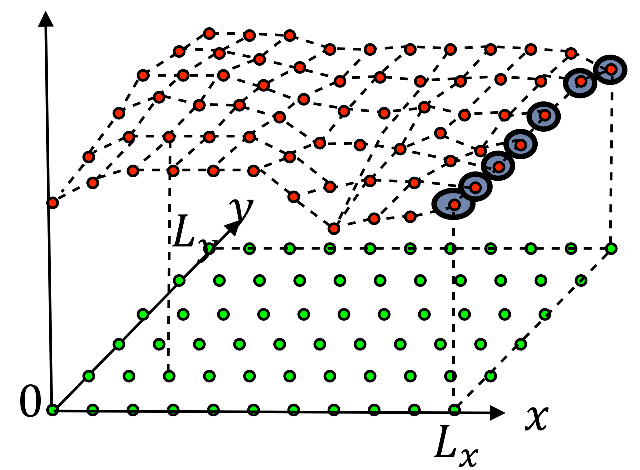
Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

Bords :
(est)

$$\begin{array}{ll}
(x_{M_x},y_0) & f_{M_x,0}=C_{est}(y_0)=C_0^{est} \\
(x_{M_x},y_1) & f_{M_x,1}=C_{est}(y_1)=C_1^{est} \\
(x_{M_x},y_2) & f_{M_x,2}=C_{est}(y_2)=C_2^{est} \\
\dots & \dots \\
(x_{M_x},y_j) & f_{M_x,j}=C_{est}(y_j)=C_j^{est} \\
\dots & \dots \\
(x_{M_x},y_{M_y-1}) & f_{M_x,M_y-1}=C_{est}\left(y_{M_y-1}\right)=C_{M_y-1}^{est} \\
(x_{M_x},y_{M_y}) & f_{M_x,M_y}=C_{est}\left(y_{M_y}\right)=C_{M_y}^{est}
\end{array}$$



Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (V)

4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

Dernière colonne

$$\begin{bmatrix} f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,j} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y-1} \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix} = F_{M_x}$$

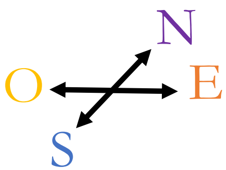
Membre de droite

$$\begin{bmatrix} C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \dots \\ C_j^{est} \\ \dots \\ C_{M_y-1}^{est} \\ C_{M_y}^{est} \end{bmatrix} = G_{M_x}$$

$$B_{M_x,M_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_{M_x} = G_{M_x}$$

Étape 4 : Écriture matricielle (bords) (VI)

4



Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

	F_0	F_1	...	F_{M_x-1}	F_{M_x}
$(0,0)$ 1 $(0,1)$ 2 ... $(0,M_y)$ M_y	1 1 ... 1 1	$B_{0,1}$	...	B_{0,M_x-1}	B_{0,M_x}
$(1,0)$ M_y+1 $(1,1)$ M_y+2 ... $(0,M_y)$ $2M_y+1$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	...	B_{1,M_x-1}	B_{1,M_x}
...	⋱	⋱	⋱	⋱	⋱
...	⋱	⋱	⋱	⋱	⋱
$(M_x,0)$ $M_x(M_y+1)$ $(M_x,1)$ $M_x(M_y+1)+1$ ... (M_x,M_y) $(M_x+1)(M_y+1)$			⋱	⋱	1 1 ... 1 1

$$
\begin{array}{c} F_0 \\ \\ F_1 \\ \\ \\ F_{M_x} \end{array}
\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c} G_0 \\ \\ G_1 \\ \\ \\ G_{M_x} \end{array}
\begin{bmatrix} C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \dots \\ C_{M_y}^{ouest} \\ -- \\ C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \dots \\ C_1^{nord} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \dots \\ C_{M_y}^{est} \end{bmatrix}
$$

Étape 4 : Écriture matricielle (intérieur) (I)

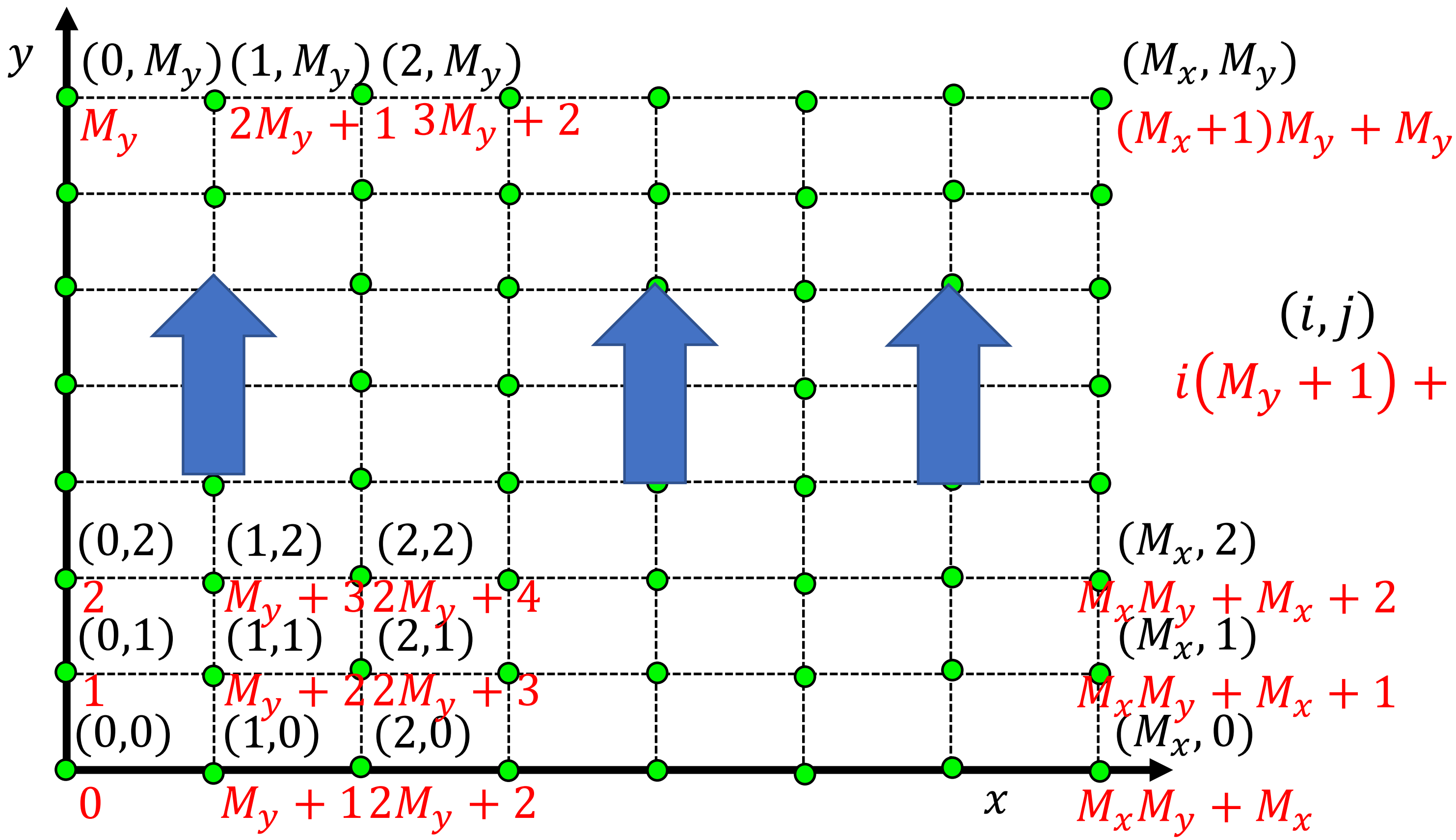
4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

Cas général :



(i,j)

$i(M_y+1)+j$

Étape 4 : Écriture matricielle (intérieur) (II)

4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

Cas général : $$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

(x_1, y_0) : $f_{1,0} = C_{sud}(x_i) = C_i^{sud}$

(x_1, y_1) : $$\frac{f_{2,1}-2f_{1,1}+f_{0,1}}{\delta x^2}+\frac{f_{1,2}-2f_{1,1}+f_{1,0}}{\delta y^2}=g_{1,1}$$

(x_1, y_2) : $$\frac{f_{2,2}-2f_{1,2}+f_{0,2}}{\delta x^2}+\frac{f_{1,3}-2f_{1,2}+f_{1,1}}{\delta y^2}=g_{1,2}$$

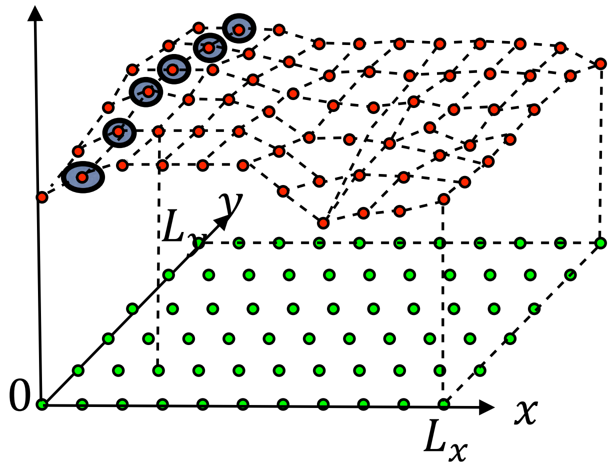
… …

(x_1, y_j) : $$\frac{f_{2,j}-2f_{1,j}+f_{0,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{1,j+1}-2f_{1,j}+f_{1,j-1}}{\delta y^2}=g_{1,j}$$

… …

(x_1, y_{M_y-1}) : $$\frac{f_{2,M_y-1}-2f_{1,M_y-1}+f_{0,M_y-1}}{\delta x^2}+\frac{f_{1,M_y}-2f_{1,M_y-1}+f_{1,M_y-2}}{\delta y^2}=g_{1,M_y-1}$$

(x_1, y_{M_y}) : $f_{1,M_y} = C_{nord}(x_1) = C_1^{nord}$



Étape 4 : Écriture matricielle (intérieur) (III)

4

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

Colonne 0

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,j} \\ \dots \\ f_{0,M_y-1} \\ f_{0,M_y} \end{bmatrix} = F_0$$

Colonne 1

$$\begin{bmatrix} f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,j} \\ \dots \\ f_{1,M_y-1} \\ f_{1,M_y} \end{bmatrix} = F_1$$

Colonne 2

$$\begin{bmatrix} f_{2,0} \\ f_{2,1} \\ \dots \\ f_{2,j} \\ \dots \\ f_{2,M_y-1} \\ f_{2,M_y} \end{bmatrix} = F_2$$

Membre de droite

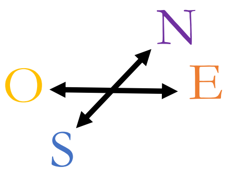
$$\begin{bmatrix} C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \dots \\ g_{1,j} \\ \dots \\ g_{1,M_y-1} \\ C_1^{nord} \end{bmatrix} = G$$

$a = 1/\delta x^2$ $\quad$ $b = 1/\delta y^2$ $\quad$ $c = -2/\delta x^2 - 2/\delta y^2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{1,0}} F_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{1,1}} F_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{1,2}} F_2$$

Étape 4 : Écriture matricielle (intérieur) (IV)

4



Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D + Formulation centrée

$$
\begin{array}{l|ccccc}
 & F_0 & F_1 & \cdots & F_{M_x-1} & F_{M_x} \\
\hline
\begin{matrix}(0,0)\ 1\\(0,1)\ 2\\ \cdots \\(0,M_y)\ M_y\end{matrix} & \begin{matrix}1&&&\\&1&&\\&&\cdots\ 1&\\&&&1\end{matrix} & & & & \\
\hline
\begin{matrix}(1,0)\ M_y+1\\(1,1)\ M_y+2\\ \cdots \\(0,M_y)\ 2M_y+1\end{matrix} & \begin{matrix}0&&&\\&a&&\\&&\cdots\ a&\\&&&0\end{matrix} & \begin{matrix}1&&&\\c\ b\ c&&&\\&\cdots&&\\&&c\ b\ c&\\&&&1\end{matrix} & \begin{matrix}0&&&\\&a&&\\&&\cdots\ a&\\&&&0\end{matrix} & & \\
\hline
\cdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\hline
\cdots & & & \begin{matrix}0&&&\\&a&&\\&&\cdots\ a&\\&&&0\end{matrix} & \begin{matrix}1&&&\\c\ b\ c&&&\\&\cdots&&\\&&c\ b\ c&\\&&&1\end{matrix} & \begin{matrix}0&&&\\&a&&\\&&\cdots\ a&\\&&&0\end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix}(M_x,0)\ M_x(M_y+1)\\(M_x,1)\ M_x(M_y+1)+1\\ \cdots \\(M_x,M_y)\ (M_x+1)(M_y+1)\end{matrix} & & & & & \begin{matrix}1&&&\\&1&&\\&&\cdots\ 1&\\&&&1\end{matrix}
\end{array}
\begin{array}{c}F_0\\ \\ F_1\\ \\ \\ \\ F_{M_x}\end{array}
\begin{bmatrix} f_{0,0}\\ f_{0,1}\\ \cdots\\ f_{0,M_y}\\ --\\ f_{1,0}\\ f_{1,1}\\ \cdots\\ f_{1,M_y}\\ --\\ \cdots\\ --\\ \cdots\\ --\\ f_{M_x,0}\\ f_{M_x,1}\\ \cdots\\ f_{M_x,M_y}\end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}G_0\\ \\ G_1\\ \\ \\ \\ G_{M_x}\end{array}
\begin{bmatrix} C_0^{ouest}\\ C_1^{ouest}\\ \cdots\\ C_{M_y}^{ouest}\\ --\\ C_1^{sud}\\ g_{1,1}\\ \cdots\\ C_1^{nord}\\ --\\ \cdots\\ --\\ \cdots\\ --\\ C_0^{est}\\ C_1^{est}\\ \cdots\\ C_{M_y}^{est}\end{bmatrix}
$$

Étape 5 : Programmation

5

Il ne reste plus qu'à demander à l'ordinateur de résoudre le problème !
→ Sous forme matricielle :

$$AF = G \quad \Rightarrow \quad F = A^{-1}G$$

Étapes informatiques :

1. Définir le vecteur G,
2. Définir la matrice A,
3. Inverser la matrice A,
4. Multiplier par le vecteur G pour avoir la solution !

→ Attention, la matrice A est beaucoup plus difficile à définir et à inverser !

Au-delà : Validation

✓

Premier exemple :

Problème de Poisson en 2D

On choisit la fonction pour le terme source :

$$g(x,y) = -\cos(x) - \cos(y)$$

On remarque alors que la fonction suivante est solution de l'équation :

$$f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x) - \cos(y) = g(x,y)$$

→ Il faut choisir les conditions aux limites correspondantes :

$$C_{nord}(x) = \cos(x) + \cos(L_y) \qquad C_{ouest}(y) = 1 + \cos(y)$$

$$C_{sud}(x) = \cos(x) + 1 \qquad C_{est}(y) = \cos(L_x) + \cos(y)$$

→ On n'a plus qu'à choisir les paramètres du domaine :

$L_x = 6$ $\quad$ $L_y = 10$ $\quad$ $M_x = 20$ $\quad$ $M_y = 40$

Exemple avec code (I)

1

Étape 1 : Définition du problème

Domaines : $x \in [0, L_x]$ $y \in [0, L_y]$

```python
# Taille du domaine
Lx=6
Ly=10
```

Conditions aux limites :

$$f(x,0) = C_{sud}(x)$$
$$f(x,L_y) = C_{nord}(x)$$

```python
# valeur de la fonction sur le bords
def Cbord(x,y):
    C=np.cos(x)+np.cos(y)
    return C
```

$$f(0,y) = C_{ouest}(y)$$
$$f(L_x,0) = C_{est}(y)$$

Terme source : $g(x,y)$

```python
# définition de la fonction g(x,y)
def gfun(x,y):
    g=-np.cos(x)-np.cos(y)
    return g
```

Exemple avec code (II)

2

Étape 2 : Discrétisation du domaine

Nombre de points : $M_x + 1, M_y + 1$

```
Mx=20
My=40
```

$$N = (M_x + 1)(M_y + 1)$$

```
#constantes
N=(Mx+1)*(My+1)
```

2 pas d'espace : $\delta x = \frac{L_x}{M_x}, \delta y = \frac{L_y}{M_y}$

```
dx=Lx/Mx
dy=Ly/My
```

Numérotation : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{M_x} = L_x$

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M_y} = L_y$$

```
#maillage 2D
x_mat,y_mat=np.meshgrid(np.linspace(0,Lx,Mx+1),np.linspace(0,Ly,My+1))
```

Exemple avec code (III)

3 4

Étape 3 & 4 : Discrétisation des équations et Écriture matricielle
(la discrétisation des équations se retrouve dans la forme de la matrice)

Définition de la matrice A
et du vecteur G :

```
#remplir la matrice et le vecteur g
for i in np.arange(0,Mx+1):   # pour i allant de 0 à Mx
    for j in np.arange(0,My+1):   # pour i allant de 0 à My

        ind=i*(My+1)+j
        indN=i*(My+1)+j+1
        indS=i*(My+1)+j-1
        indE=(i+1)*(My+1)+j
        indO=(i-1)*(My+1)+j

         # si ligne d'un point de bord
        if ( (i==0) or (i==Mx) or (j==0) or (j==My) ):

            #un sur la diagonale
            M[ind,ind]=1

            #valeur de la fonction sur le bord
            g[ind]=Cbord(i*dx,j*dy)

        else:

            #a,b,c,b,c sur les colonnes des points voisins
            M[ind,[indO,indS,ind,indN,indE]]=[a,b,c,b,a]

            #valeur de la fonction g(x,y)
            g[ind]=gfun(i*dx,j*dy)
```

(i,j)

$i(M_y+1)+j$

Exemple avec code (IV)

5 ✓

Étape 5 : Programmation et Validation

Calcul de la solution :

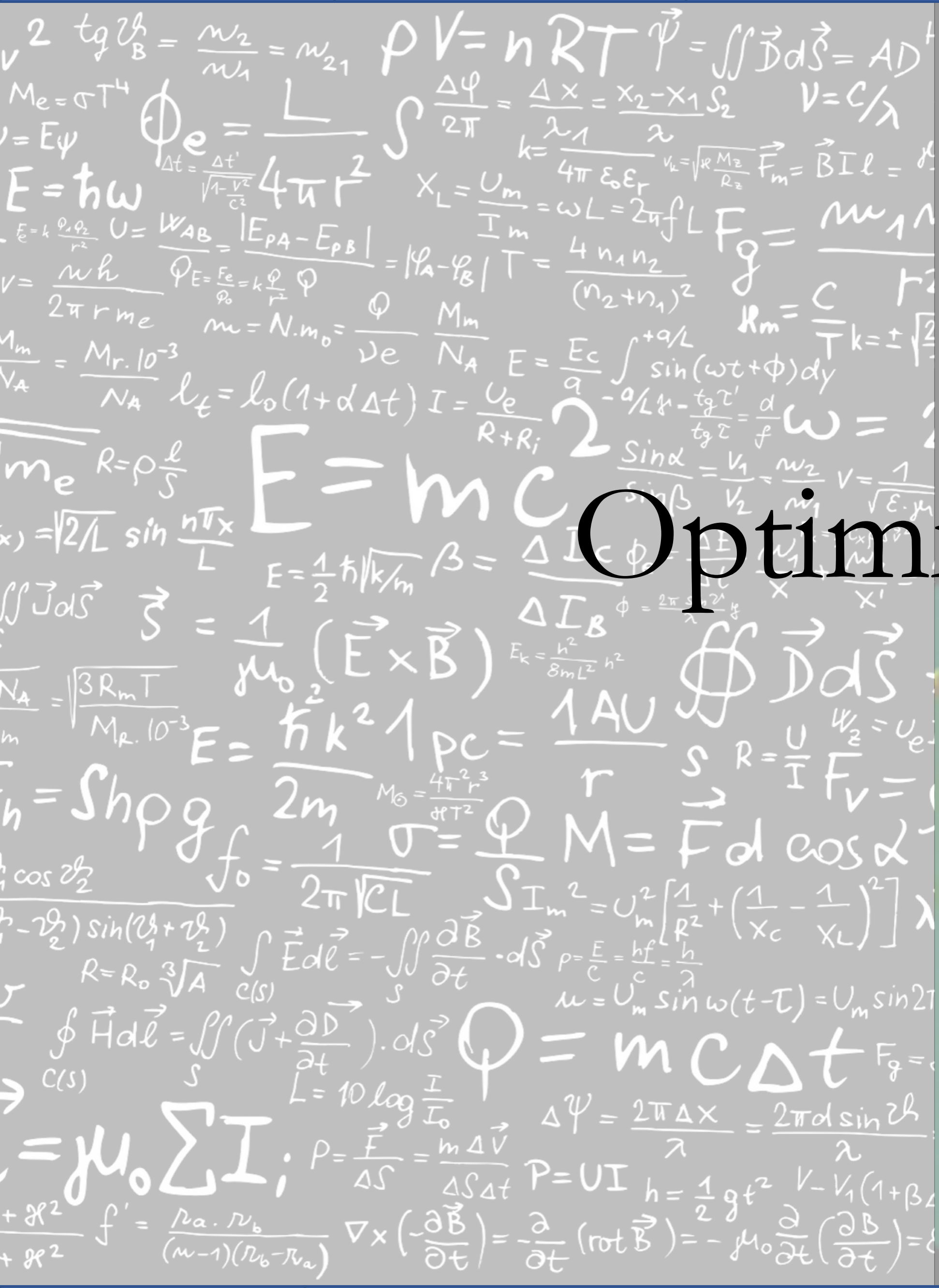
```
#solution f du problème M*f= g
f=np.linalg.solve(M,g)
```

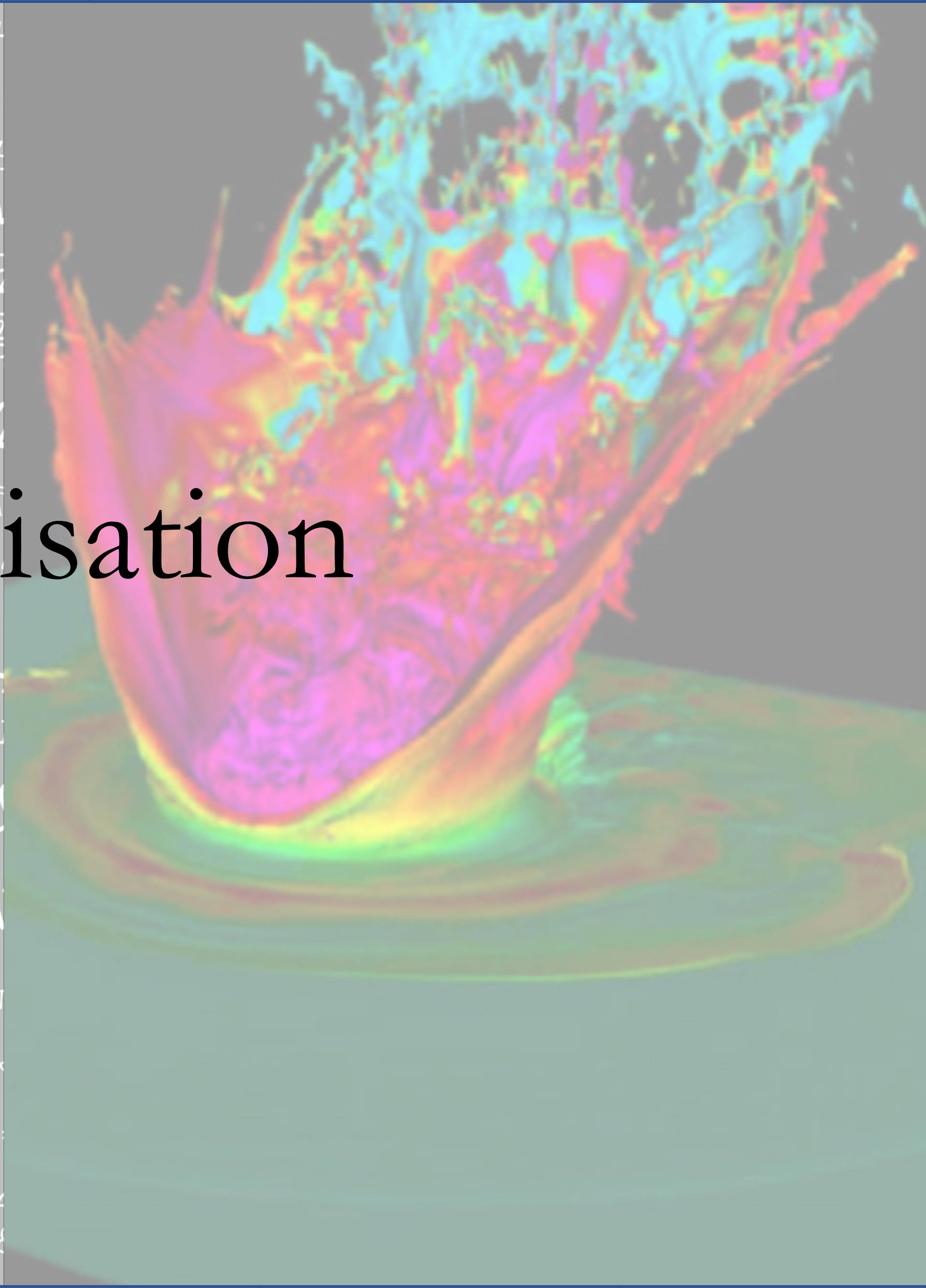
Comparaison avec solution analytique :

```
#solution exacte
fex_mat=Cbord(x_mat,y_mat)
```

```
#remettre sous forme matricielle
f_mat=np.zeros([My+1,Mx+1])   # attention, ordre inversé
for i in np.arange(0,Mx+1):   # pour i allant de 0 à Mx
    for j in np.arange(0,My+1):   # pour i allant de 0 à My
        ind=i*(My+1)+j
        f_mat[j,i]=f[ind]     # attention, ordre inversé
```

→ Il ne faut pas oublier de remettre la solution sous forme matricielle à la fin !





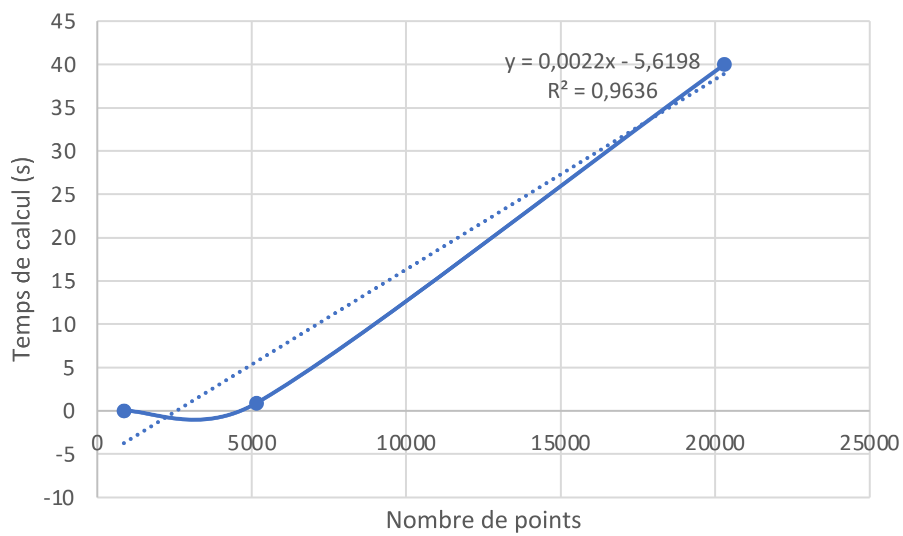
Optimisation

Problème de temps de calcul

Comme expliqué précédemment, le nombre de points à manipuler augmente rapidement avec la résolution en 2D

→ C'est également le cas du temps de calcul !

Résolution	Temps de calcul
20 x 40	0,001 seconde
50 x 100	0,9 seconde
100 x 200	40 secondes



→ Ça va être très compliqué avec cette méthode d'atteindre des hautes résolutions !

Notion de matrice creuse

Pour gagner du temps, on peut utiliser le concept de matrice creuse :

Matrice pleine

= on représente les matrices comme des matrices

= on écrit tous les éléments de la matrice, y compris ceux qui sont nuls

Avantages :
Plus facile à coder
Inconvénients :
Nombre de points manipulable limité

Matrice creuse

= on représente les matrices comme des vecteurs

= on écrit seulement les éléments non nuls + leurs indices de lignes et colonnes

Avantages :
Grand nombre de points possibles
Inconvénients :
Moins facile à coder

→ Plus de détails en TP

Coder une matrice creuse (principe)

Voyons juste rapidement le principe derrière les matrices creuses :

$$M = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{N-1} \end{bmatrix} \Rightarrow val = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$row = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \end{bmatrix} \qquad col = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \end{bmatrix}$$

N^2 éléments à sauvegarder

$3 \times N$ éléments à sauvegarder

→ Beaucoup moins de mémoire + fonctions optimisées en python !

Coder une matrice creuse (exemple)

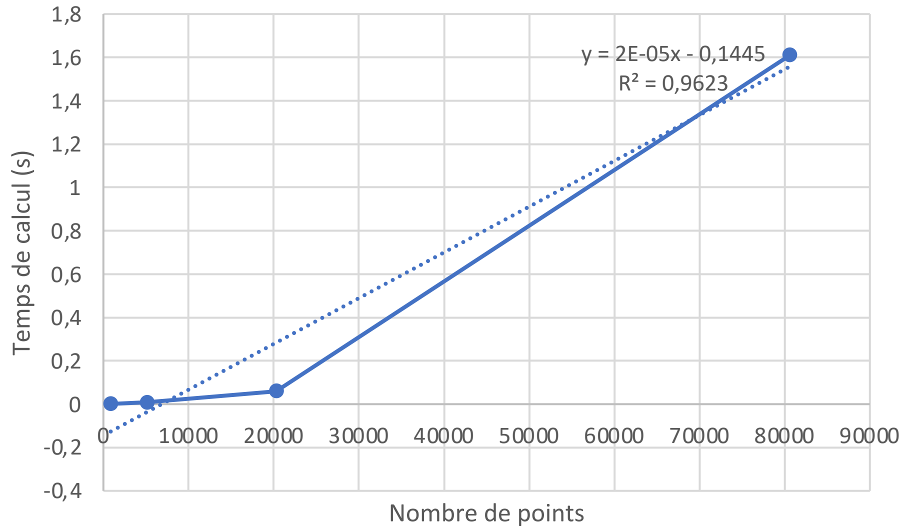
```python
#MODIF remplir les vecteurs row, col et val et le vecteur g
offset=-1  #indice offset (nombre d'éléments ajoutés à (row,val,col) -1)
for i in np.arange(0,Mx+1):   # pour i allant de 0 à Mx
    for j in np.arange(0,My+1):   # pour i allant de 0 à My

        ind=i*(My+1)+j
        indN=i*(My+1)+j+1
        indS=i*(My+1)+j-1
        indE=(i+1)*(My+1)+j
        indO=(i-1)*(My+1)+j

         # si ligne d'un point de bord
        if ( (i==0) or (i==Mx) or (j==0) or (j==My) ):

            #un sur la diagonale
            #MODIF au lieu de M[ind,ind]=1
            row[offset+1]=ind
            col[offset+1]=ind
            val[offset+1]=1
            offset=offset+1   # on vient d'ajouter 1 élément et on incrément donc offset de 1

            #valeur de la fonction sur le bord
            g[ind]=Cbord(i*dx,j*dy)

        else:

            #a,b,c,b,a sur les colonnes des points voisins
            #MODIF au lieu de M[ind,[indO,indS,ind,indN,indE]]=[a,b,c,b,a]
            row[offset+(np.arange(1,5+1))]=[ind,ind,ind,ind,ind]
            col[offset+(np.arange(1,5+1))]=[indO,indS,ind,indN,indE]
            val[offset+(np.arange(1,5+1))]=[a,b,c,b,a]
            offset=offset+5   # on vient d'ajouter 5 éléments et on incrément donc offset de 5

            #valeur de la fonction g(x,y)
            g[ind]=gfun(i*dx,j*dy)

#MODIF création de la matrice creuse
M=coo_matrix((val, (row, col)), shape=(N, N))
```

```python
#solution du problème
#MODIF au lieu f=np.linalg.solve(M,g)
M = M.tocsr()    #on convertit la matrice M en un format comprimé pour pouvoir utiliser spsolve
f = spsolve(M, g)
```

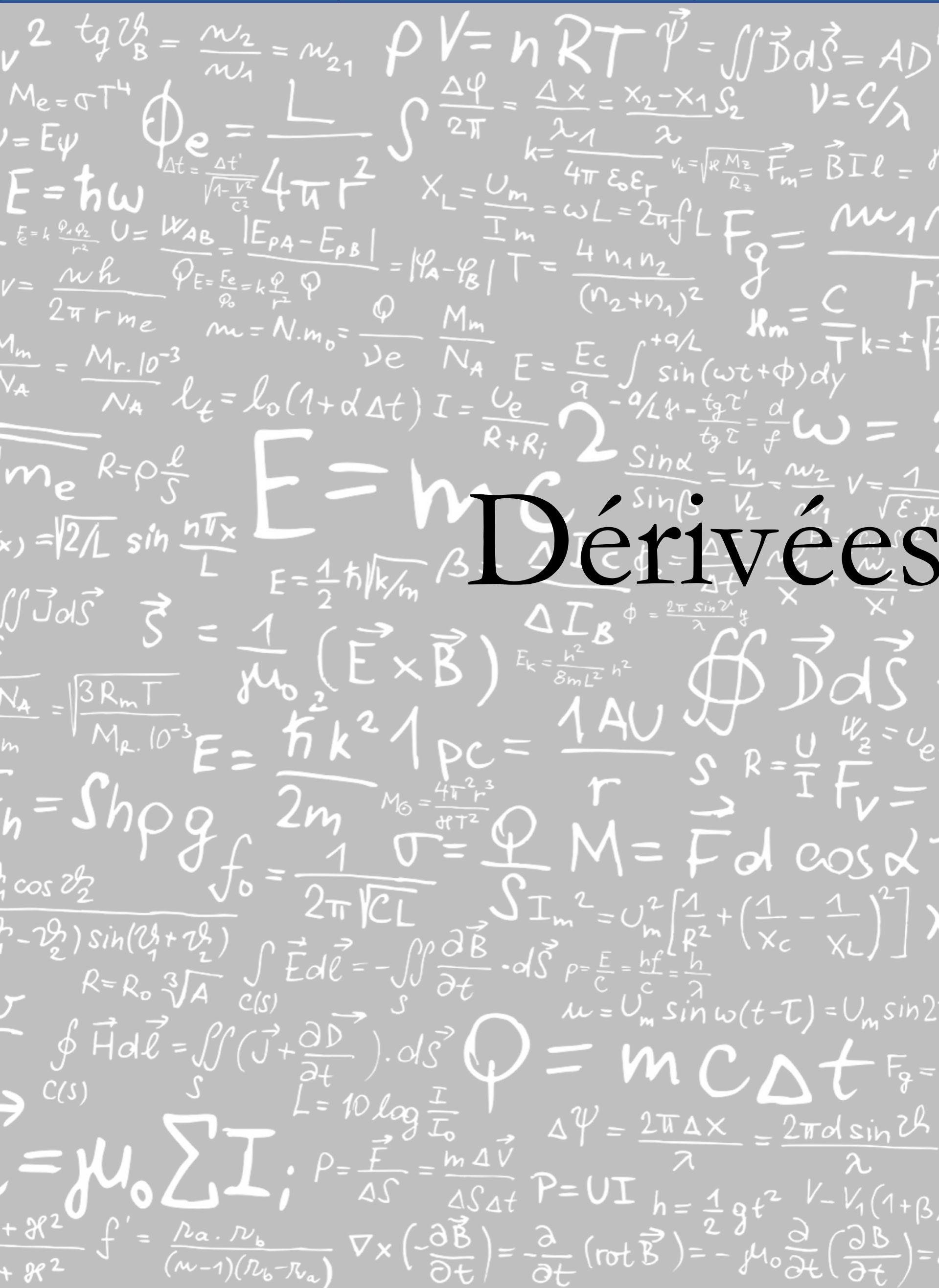
Test sur le temps de calcul

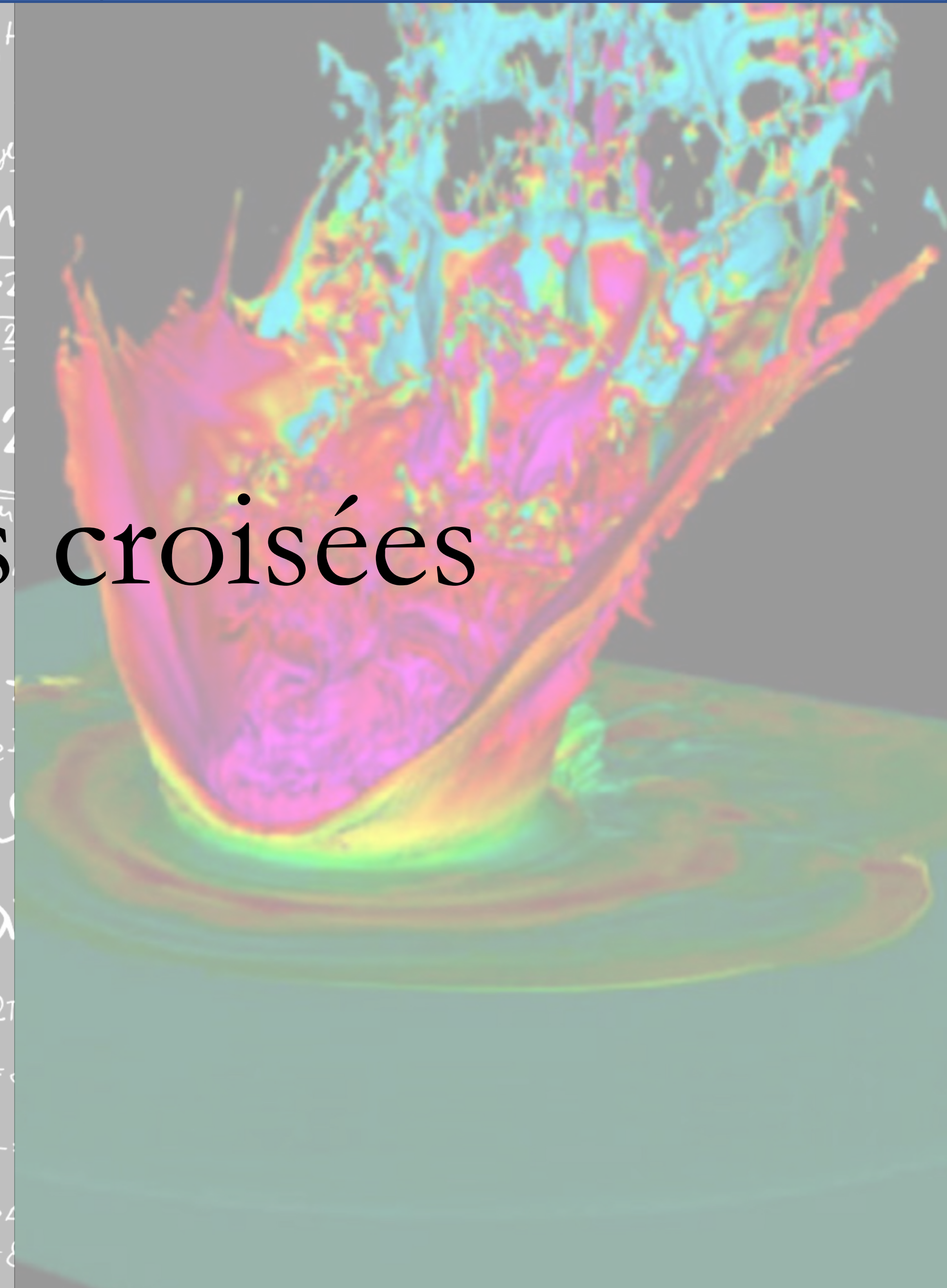
On reprend maintenant les résolutions précédentes et on vérifie le temps de calcul :

Résolution	Temps de calcul
20 x 40	0,001 seconde
50 x 100	0,009 seconde
100 x 200	0,06 secondes
200 x 400	1,61 secondes



→ On peut ainsi manipuler sans souci des matrices de dimension 80 000 x 80 000 !





Dérivées croisées

Définition d'une dérivée croisée

On appelle **dérivée croisée** une dérivée qui fait intervenir les deux pas d'espace dans les deux directions définies en 2D :

Non croisée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

Croisée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$$

→ Qu'est-ce que cela change pour la résolution du problème ?

Étape 1 : Définition du problème

1

Avant de passer à la partie numérique, il faut s'assurer
d'avoir bien défini le problème physique/mathématique continu

Deuxième exemple :
Problème de Poisson en 2D (termes croisés)

Équation : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \boldsymbol{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y)$$ (problème de Poisson **avec termes croisés**)

Inconnue : $f(x,y)$ (fonction réelle 2D)

Domaines : $x \in [0, L_x]$ $y \in [0, L_y]$ (rectangle 2D)

Condition aux limites :

$$f(x,0) = C_{sud}(x)$$
$$f(x,L_y) = C_{nord}(x)$$ $\forall x \in [0, L_x]$

(CL de type Dirichlet)

$$f(0,y) = C_{ouest}(y)$$
$$f(L_x,0) = C_{est}(y)$$ $\forall y \in [0, L_y]$

Étape 2 : Discrétisation du domaine

2

On va maintenant passer d'un milieu continu à discret à l'aide d'un maillage :

<u>Deuxième exemple :</u>
Problème de Poisson en 2D (termes croisés) + Maillage uniforme

Nombres de points : $N = (M_x + 1)(M_y + 1)$ en espace

Pas d'espace : $\delta x = L_x/M_x \qquad \delta y = L_y/M_y$

(résolution)

Numérotation : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{M_x} = L_x$

$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M_y} = L_y$

(noeuds du maillage spatial)

Équivalence discret/continu : $f(x_i, y_j) = f_{i,j}$ (notation)

Valeurs nodales connues : $g(x_i, y_j) = g_{i,j}$

Valeurs nodales inconnues : $f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, \dots, f_{0,M_y}$

…

$f_{M_x,0}, f_{M_x,1}, f_{M_x,2}, \dots, f_{M_x,M_y}$

(valeurs aux noeuds)

Étape 3 : Discrétisation des équations (domaine)

3

Deuxième exemple :

Problème de Poisson en 2D (termes croisés) + Formulation centrée

On cherche à discrétiser l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \mathbf{2}\frac{\boldsymbol{\partial^2 f}}{\boldsymbol{\partial x \partial y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + \mathbf{2}\frac{\boldsymbol{\partial^2 f_{i,j}}}{\boldsymbol{\partial x \partial y}} + \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = g_{i,j}$$

Discrétisation spatiale : Centrée (maillage uniforme)

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y}\right) \approx \frac{1}{2\partial x}\left[\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\delta y}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2} + \frac{\boldsymbol{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+f_{i-1,j-1}}}{\boldsymbol{4\partial x\partial y}} + \frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2} = g_{i,j}$$

$$\forall i \in [1, M_x - 1], \forall j \in [1, M_y - 1]$$

Étape 4 : Écriture matricielle (exemple) (I)

4

Deuxième exemple :

Problème de Poisson en 2D (termes croisés)

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+f_{i-1,j-1}}{4\partial x\partial y}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

Bords :

$$\begin{array}{ll}
(x_0,y_0) & f_{0,0}=C_{ouest}(y_0)=C_0^{ouest} \\
(x_0,y_1) & f_{0,1}=C_{ouest}(y_1)=C_1^{ouest} \\
(x_0,y_2) & f_{0,2}=C_{ouest}(y_2)=C_2^{ouest} \\
\dots & \dots \\
(x_0,y_j) & f_{0,j}=C_{ouest}(y_j)=C_j^{ouest} \\
\dots & \dots \\
(x_0,y_{M_y-1}) & f_{0,M_y-1}=C_{ouest}\left(y_{M_y-1}\right)=C_{M_y-1}^{ouest} \\
(x_0,y_{M_y}) & f_{0,M_y}=C_{ouest}\left(y_{M_y}\right)=C_{M_y}^{ouest}
\end{array}$$

Étape 4 : Écriture matricielle (exemple) (II)

4

Deuxième exemple :

Problème de Poisson en 2D (termes croisés)

Première colonne

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,j} \\ \dots \\ f_{0,M_y-1} \\ f_{0,M_y} \end{bmatrix} = F_0$$

Dernière colonne

$$\begin{bmatrix} f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,j} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y-1} \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix} = F_{M_x}$$

Membre de droite

$$\begin{bmatrix} C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \dots \\ C_j^{ouest} \\ \dots \\ C_{M_y-1}^{ouest} \\ C_{M_y}^{ouest} \end{bmatrix} = G_0 \qquad \begin{bmatrix} C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \dots \\ C_j^{est} \\ \dots \\ C_{M_y-1}^{est} \\ C_{M_y}^{est} \end{bmatrix} = G_{M_x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_0 = G_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_{M_x} = G_{M_x}$$

Étape 4 : Écriture matricielle (exemple) (III)

4

Deuxième exemple :

Problème de Poisson en 2D (termes croisés)

$$\frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\delta x^2}+\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}-f_{i-1,j+1}+f_{i-1,j-1}}{4\partial x\partial y}+\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\delta y^2}=g_{i,j}$$

$$\begin{array}{c}(x_1,y_0)\\(x_1,y_1)\\(x_1,y_2)\\\dots\\(x_1,y_j)\\\dots\\(x_1,y_{M_y-1})\\(x_1,y_{M_y})\end{array}
\left[\begin{array}{l}
f_{1,0}=C_{sud}(x_i)=C_i^{sud}\\
\dfrac{f_{2,1}-2f_{1,1}+f_{0,1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{2,2}-f_{2,0}-f_{0,2}+f_{0,0}}{4\partial x\partial y}+\dfrac{f_{1,2}-2f_{1,1}+f_{1,0}}{\delta y^2}=g_{1,1}\\
\dfrac{f_{2,2}-2f_{1,2}+f_{0,2}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{2,3}-f_{2,1}-f_{0,3}+f_{0,1}}{4\partial x\partial y}+\dfrac{f_{1,3}-2f_{1,2}+f_{1,1}}{\delta y^2}=g_{1,2}\\
\dots\\
\dfrac{f_{2,j}-2f_{1,j}+f_{0,j}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{2,j+1}-f_{2,j-1}-f_{0,j+1}+f_{0,j-1}}{4\partial x\partial y}+\dfrac{f_{1,j+1}-2f_{1,j}+f_{1,j-1}}{\delta y^2}=g_{1,j}\\
\dots\\
\dfrac{f_{2,M_y-1}-2f_{1,M_y-1}+f_{0,M_y-1}}{\delta x^2}+\dfrac{f_{2,M_y}-f_{2,M_y-2}-f_{0,M_y}+f_{0,M_y-2}}{4\partial x\partial y}+\dfrac{f_{1,M_y}-2f_{1,M_y-1}+f_{1,M_y-2}}{\delta y^2}=g_{1,M_y-1}\\
f_{1,M_y}=C_{nord}(x_1)=C_1^{nord}
\end{array}\right.$$

Étape 4 : Écriture matricielle (exemple) (IV)

4

Deuxième exemple :

Problème de Poisson en 2D (termes croisés)

Colonne 0

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,j} \\ \dots \\ f_{0,M_y-1} \\ f_{0,M_y} \end{bmatrix} = F_0$$

Colonne 1

$$\begin{bmatrix} f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,j} \\ \dots \\ f_{1,M_y-1} \\ f_{1,M_y} \end{bmatrix} = F_1$$

Colonne 2

$$\begin{bmatrix} f_{2,0} \\ f_{2,1} \\ \dots \\ f_{2,j} \\ \dots \\ f_{2,M_y-1} \\ f_{2,M_y} \end{bmatrix} = F_2$$

Membre de droite

$$\begin{bmatrix} C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \dots \\ g_{1,j} \\ \dots \\ g_{1,M_y-1} \\ C_1^{nord} \end{bmatrix} = G$$

$a = 1/\delta x^2$ $\quad$ $b = 1/\delta y^2$ $\quad$ $c = -2/\delta x^2 - 2/\delta y^2$ $\quad$ $\mathbf{d = 1/4\delta x \partial y}$

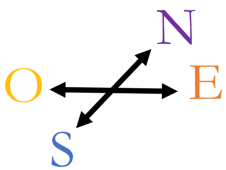
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d & a & -d & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d & a & -d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} F_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d & a & d & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -d & a & d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_2$$

4

Étape 4 : Écriture matricielle (exemple) (V)

<u>Deuxième exemple :</u>

Problème de Poisson en 2D (termes croisés)



$(0,0)$ 1
$(0,1)$ 2
…
$(0,M_y)$ M_y
$(1,0)$ M_y+1
$(1,1)$ M_y+2
…
$(0,M_y)$ $2M_y+1$
…
…
$(M_x,0)$ $M_x(M_y+1)$
$(M_x,1)$ $M_x(M_y+1)+1$
…
(M_x,M_y) $(M_x+1)(M_y+1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
F_0 & F_1 & \dots & F_{M_x-1} & F_{M_x} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & \dots & 1 & \\ & & & 1\end{matrix} & & & & \\
\hline
\begin{matrix}0 & & \\ \boldsymbol{d}\ a\ -\boldsymbol{d} & & \\ & \dots & \\ & \boldsymbol{d}\ a\ -\boldsymbol{d} & \\ & & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & \\ c\ b\ c & & \\ & \dots & \\ & c\ b\ c & \\ & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & & \\ -\boldsymbol{d}\ a\ \boldsymbol{d} & & \\ & \dots & \\ & -\boldsymbol{d}\ a\ \boldsymbol{d} & \\ & & 0\end{matrix} & & \\
\hline
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\hline
 & & \begin{matrix}0 & & \\ \boldsymbol{d}\ a\ -\boldsymbol{d} & & \\ & \dots & \\ & \boldsymbol{d}\ a\ -\boldsymbol{d} & \\ & & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & \\ c\ b\ c & & \\ & \dots & \\ & c\ b\ c & \\ & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & & \\ -\boldsymbol{d}\ a\ \boldsymbol{d} & & \\ & \dots & \\ & -\boldsymbol{d}\ a\ \boldsymbol{d} & \\ & & 0\end{matrix} \\
\hline
 & & & & \begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & \dots & 1 & \\ & & & 1\end{matrix}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ -- \\ f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}
\begin{matrix} F_0 \\ \\ F_1 \\ \\ F_{M_x} \end{matrix}
=
\begin{matrix} G_0 \\ \\ G_1 \\ \\ G_{M_x} \end{matrix}
\begin{bmatrix} C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \dots \\ C_{M_y}^{ouest} \\ -- \\ C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \dots \\ C_1^{nord} \\ -- \\ \dots \\ -- \\ \dots \\ -- \\ C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \dots \\ C_{M_y}^{est} \end{bmatrix}
$$

Étape 5 : Programmation

5

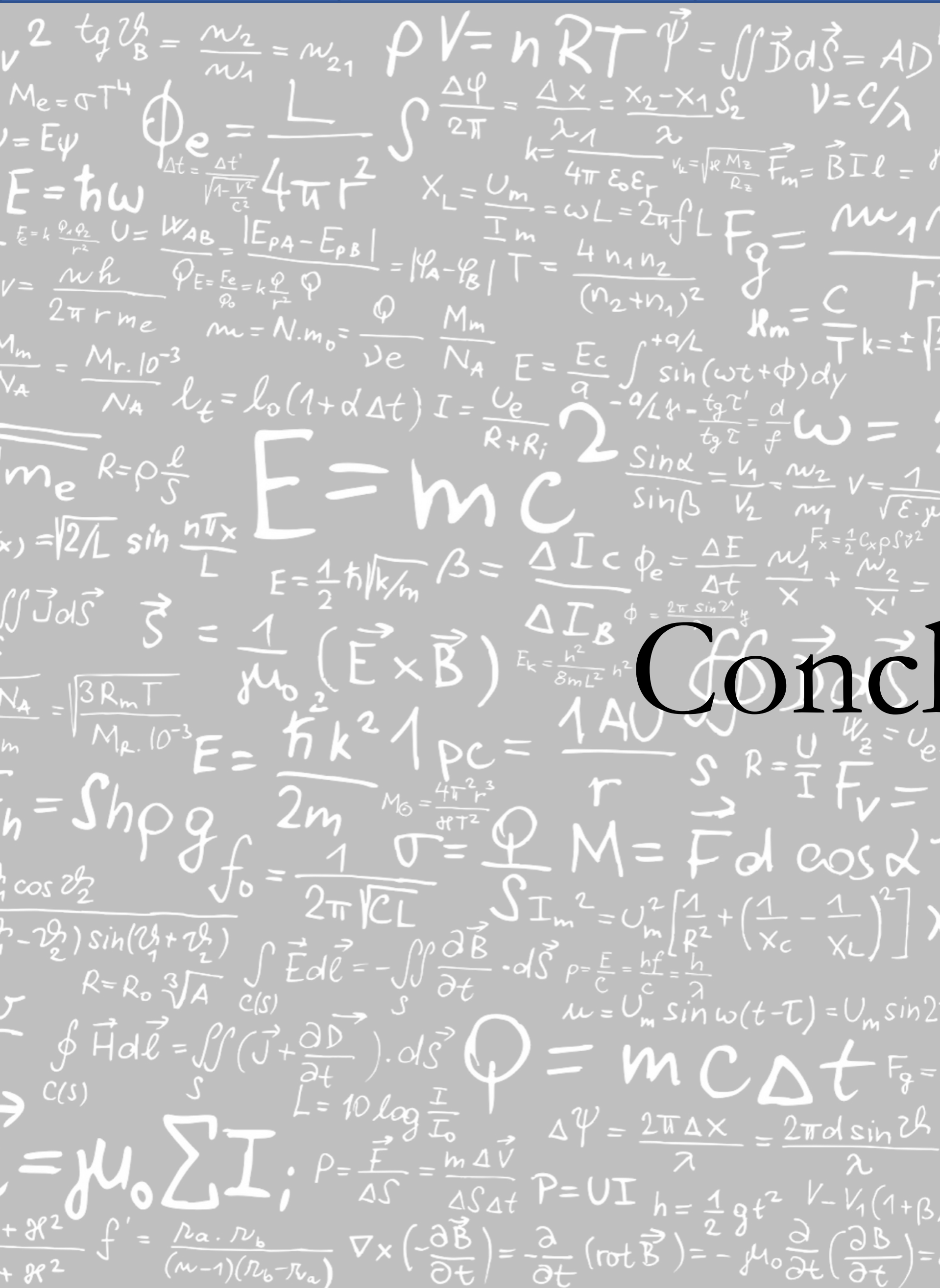
Il ne reste plus qu'à demander à l'ordinateur de résoudre le problème !
→ Sous forme matricielle :

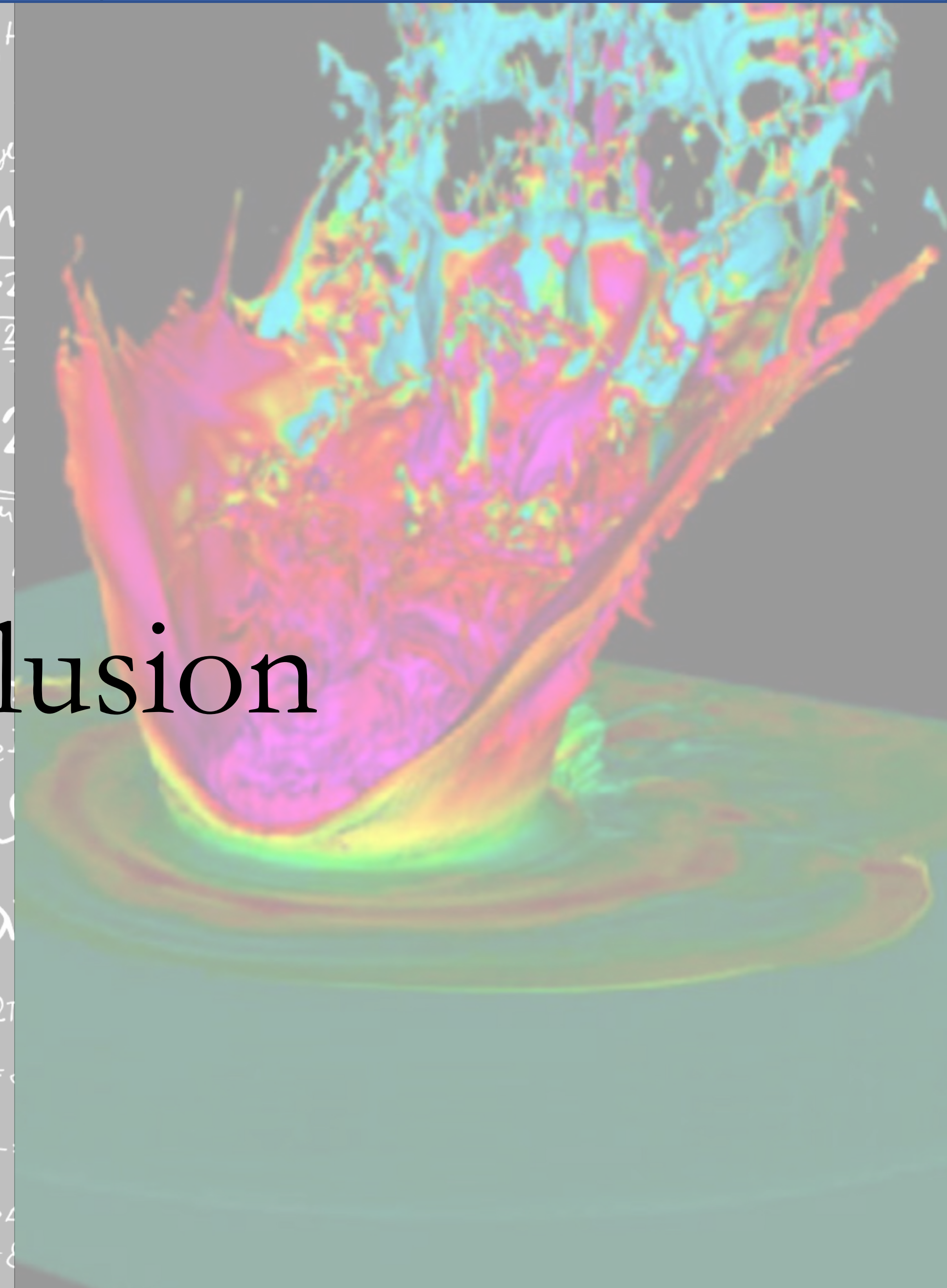
$$AF = G \quad \Rightarrow \quad F = A^{-1}G$$

Étapes informatiques :

1. Définir le vecteur G,
2. Définir la matrice A,
3. Inverser la matrice A,
4. Multiplier par le vecteur G pour avoir la solution !

→ Attention, la matrice A est beaucoup plus difficile à définir et à inverser !





Conclusion

Cycle des méthodes numériques : 2D

Équation(s)

domaine rectangulaire

1. Définition du problème

discrétisation
dans les deux directions

2. Discrétisation du domaine

attention aux termes croisés !

3. Discrétisation des équations

définition des matrices
par bloc

4. Écriture matricielle

matrices creuses

(validation)

5. Programmation

Solution numérique

Notion de matrice creuse

Pour gagner du temps, on peut utiliser le concept de matrice creuse :

Matrice pleine

$$M = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{N-1} \end{bmatrix}$$

Matrice creuse

$$val = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{bmatrix} \quad row = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \end{bmatrix} \quad col = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \end{bmatrix}$$

Avantages :
Plus facile à coder
Inconvénients :
Nombre de points manipulable limité

Avantages :
Grand nombre de points possibles
Inconvénients :
Moins facile à coder

→ Plus de détails en TP

Application à l'UE

Définition du problème

- Conditions aux limites en 2D.

Discré-tisation du domaine :

- Numéro-tation en 2D.

Discré-tisation des équations :

- Savoir gérer des termes croisés.

Écriture matricielle :

- Renuméro-ter les indices,
- Savoir écrire des matrices en bloc.

Program-mation :

- Résolution en matrices pleines,
- Résolution en matrices creuses.

Validation :

- Effectuer une validation 2D.

Plan de l'UE

Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + TP

5 Décembre : Cours 4 + TP

12 Décembre : Cours 5 + TP

19 Décembre : Cours 6 + TP

9 Janvier : Cours 7 + **TP**

16 Janvier : Cours 8 + TP

23 Janvier : TP

30 Janvier : Examen

Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)