

Rappels spin $\frac{1}{2}$:

$$J_{1,z}^2 |\uparrow\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\uparrow\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\uparrow\rangle \quad (l = \frac{1}{2})$$

$$J_{1,z} |\uparrow\rangle = \hbar m |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \quad (m = \frac{1}{2})$$

$$J_{1,z} |\downarrow\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |\downarrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle$$

$$J_{1,z} |\uparrow\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} |\uparrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle$$

$$4.1.1. \quad \{ |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 ; |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 ; |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 ; |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \}$$

$$= \{ |\uparrow\uparrow\rangle ; |\downarrow\downarrow\rangle ; |\uparrow\downarrow\rangle ; |\downarrow\uparrow\rangle \}$$

$$4.1.2. \quad \hat{J}_z |\uparrow\uparrow\rangle = \hat{J}_{1z} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 \otimes \hat{J}_{2z} |\uparrow\rangle_2$$

$$= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 = \hbar |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\hat{J}^2 |\uparrow\uparrow\rangle = (\hat{J}_1 + \hat{J}_2)^2 |\uparrow\uparrow\rangle = (\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2) |\uparrow\uparrow\rangle$$

On a :

$$\hat{J}_1^2 |\uparrow\uparrow\rangle = \hat{J}_2^2 |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\text{et : } \hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 = \hat{J}_{1x} \hat{J}_{2x} + \hat{J}_{1y} \hat{J}_{2y} + \hat{J}_{1z} \hat{J}_{2z}$$

$$\text{Or } J_{1x} = \frac{J_{1+} + J_{1-}}{2} \quad \text{et} \quad J_{1y} = \frac{J_{1+} - J_{1-}}{2i} \quad (\text{de m \text{ pour } } J_{2x,y})$$

$$\text{d'o\`u : } \hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 = \left(\frac{J_{1+} + J_{1-}}{2} \right) \left(\frac{J_{2+} + J_{2-}}{2} \right) + \left(\frac{J_{1+} - J_{1-}}{2i} \right) \left(\frac{J_{2+} - J_{2-}}{2i} \right) + J_{1z} J_{2z}$$

$$= \frac{1}{2} (J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+}) + J_{1z} J_{2z}$$

(les termes en $J_{1+} J_{2+}$ et $J_{1-} J_{2-}$ s'\'eliminent deux-\`a-deux)

(2)

On a donc :

$$\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 | \uparrow \uparrow \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{(\hat{J}_{1+} \hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-} \hat{J}_{2+})}_{=0} | \uparrow \uparrow \rangle + \underbrace{\hat{J}_{1z} \hat{J}_{2z}}_{=\frac{\hbar^2}{4}} | \uparrow \uparrow \rangle = \frac{\hbar^2}{4} | \uparrow \uparrow \rangle$$

et finalement :

$$\hat{J}^2 | \uparrow \uparrow \rangle = \underbrace{\hat{J}_1^2}_{\frac{3\hbar^2}{4}} | \uparrow \uparrow \rangle + \underbrace{\hat{J}_2^2}_{\frac{3\hbar^2}{4}} | \uparrow \uparrow \rangle + \underbrace{2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2}_{2 \times \frac{\hbar^2}{4}} | \uparrow \uparrow \rangle = 2\hbar^2 | \uparrow \uparrow \rangle$$

$\Rightarrow | \uparrow \uparrow \rangle$ est bien état propre de $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ avec $j=1$ et $m=1$
 (rappel : $\hat{J}^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) | j, m \rangle$ et $\hat{J}_z | j, m \rangle = m\hbar | j, m \rangle$)

De même : $\hat{J}^2 | \downarrow \downarrow \rangle = 2\hbar^2 | \downarrow \downarrow \rangle$
 et $\hat{J}_z | \downarrow \downarrow \rangle = -\hbar | \downarrow \downarrow \rangle$ } $\vec{v}_p$ avec $j=1$ et $m=-1$

Cas de $| \uparrow \downarrow \rangle$ et $| \downarrow \uparrow \rangle$

$$\hat{J}^2 | \uparrow \downarrow \rangle = \underbrace{\hat{J}_1^2}_{\frac{3\hbar^2}{4}} | \uparrow \downarrow \rangle + \underbrace{\hat{J}_2^2}_{\frac{3\hbar^2}{4}} | \uparrow \downarrow \rangle + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 | \uparrow \downarrow \rangle$$

$$\text{Reste : } \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 | \uparrow \downarrow \rangle = \left[\frac{1}{2} (\cancel{\hat{J}_{1+} \hat{J}_{2-}} + \hat{J}_{1-} \hat{J}_{2+}) + \hat{J}_{1z} \hat{J}_{2z} \right] | \uparrow \downarrow \rangle$$

$$\hat{J}_{1-} | \uparrow \rangle_1 = \hat{J}_{1-} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_1 = \hbar | \downarrow \rangle_1$$

$$\hat{J}_{2+} | \downarrow \rangle_2 = \hbar | \uparrow \rangle_2$$

$$\Rightarrow \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 | \uparrow \downarrow \rangle = \frac{\hbar^2}{2} | \downarrow \uparrow \rangle - \frac{\hbar^2}{4} | \uparrow \downarrow \rangle$$

$\Rightarrow | \uparrow \downarrow \rangle$ n'est pas $\vec{v}_p$ de $\hat{J}^2$

De même, on montre que $| \downarrow \uparrow \rangle$ n'est pas $\vec{v}_p$ de $\hat{J}^2$

(3)

$$3) \text{ on a: } | \uparrow \uparrow \rangle = | 1, 1 \rangle$$

$$| \downarrow \downarrow \rangle = | 1, -1 \rangle$$

$$\text{on a: } \hat{J}_- | 1, 1 \rangle = \hbar \sqrt{2} | 1, 0 \rangle$$

$$(\text{rappel: } \hat{J}_- | j, m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} | j, m-1 \rangle)$$

$$\text{Par ailleurs: } \hat{J}_- | 1, 1 \rangle = (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) | \uparrow \uparrow \rangle \\ = \hbar (| \downarrow \uparrow \rangle + | \uparrow \downarrow \rangle)$$

$$\text{d'où: } | 1, 0 \rangle = \frac{| \downarrow \uparrow \rangle + | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Le 4}^{\text{e}} \text{ état est forcément } \perp \text{ aux trois autres } \Rightarrow | 0, 0 \rangle = \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 | 0, 0 \rangle &= (\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1\hat{J}_2) \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} \frac{| \downarrow \uparrow \rangle}{\sqrt{2}} - \frac{3\hbar^2}{4} \frac{| \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} + \frac{3\hbar^2}{4} \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} \\ &\quad + (\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+} + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z}) \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\hbar^2}{2} \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} + \hbar^2 \frac{| \uparrow \downarrow \rangle - | \downarrow \uparrow \rangle}{\sqrt{2}} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$4) \hat{P}_{1 \leftrightarrow 2} | 0, 0 \rangle = \frac{| \uparrow \downarrow \rangle - | \downarrow \uparrow \rangle}{\sqrt{2}} = -| 0, 0 \rangle$$

$$\hat{P}_{1 \leftrightarrow 2} | 1, 0 \rangle = | 1, 0 \rangle$$

$\Rightarrow$ cf. cours / TD à venir sur les particules identiques !

(4)

5. Particule (1): $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ avec $\begin{cases} |\uparrow\rangle = |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle \\ |\downarrow\rangle = |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$

Particule (2): $\{|\downarrow -1\rangle, |0\rangle, |\uparrow 1\rangle\}$ avec $\begin{cases} |\downarrow -1\rangle = |1, -1\rangle \\ |0\rangle = |1, 0\rangle \\ |\uparrow 1\rangle = |1, 1\rangle \end{cases}$

Dim de l'espace produit: $2 \times 3 = 6$

Base couplée: $j = \frac{3}{2}$ ou $j = \frac{1}{2}$

$$\left\{ \left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle; \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle; \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle; \left| \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\rangle; \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle; \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$$

Pour rappel: base produit:

$$\{|\uparrow -1\rangle; |\uparrow 0\rangle; |\uparrow 1\rangle; |\downarrow -1\rangle; |\downarrow 0\rangle; |\downarrow 1\rangle\}$$

On veut écrire les vecteurs de la base couplée en f° des $\vec{v}$ de la base produit.

Candidat "naturel" pour $|\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\rangle$: $|\uparrow, 1\rangle$

On vérifie:

$$J_z |\uparrow, 1\rangle = (J_{z1} + J_{z2}) |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \left(\frac{\hbar}{2} + \hbar\right) |\uparrow, 1\rangle = \frac{3}{2} \hbar |\uparrow, 1\rangle$$

$$J^2 |\uparrow, 1\rangle = (J_1^2 + J_2^2 + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z}) |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 2\hbar^2 |\uparrow, 1\rangle \quad \checkmark \\ &\rightarrow \frac{3\hbar^2}{4} |\uparrow, 1\rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{15}{4} \hbar^2 |\uparrow, 1\rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1\right) \hbar^2 |\uparrow, 1\rangle$$

$$\Rightarrow \text{on a donc bien } |\uparrow, 1\rangle = \left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\text{On vérifie de même: } |\downarrow, -1\rangle = \left| \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\rangle$$

Restent à trouver: $|\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle$

$$J_- \left| \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle \quad (5)$$

$$= (J_{1-} + J_{2-}) \left| \uparrow \uparrow \right\rangle = \hbar \left| \downarrow \uparrow \right\rangle + \hbar \sqrt{2} \left| \uparrow \downarrow \right\rangle$$

$$\text{d'où : } \left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\left| \downarrow \uparrow \right\rangle + \sqrt{2} \left| \uparrow \downarrow \right\rangle}{\sqrt{3}}$$

De même, on a :

$$J_+ \left| \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= (J_{1+} + J_{2+}) \left| \downarrow \downarrow \right\rangle = \hbar \left| \uparrow \downarrow \right\rangle + \hbar \sqrt{2} \left| \downarrow \uparrow \right\rangle$$

$$\text{d'où : } \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\left| \uparrow \downarrow \right\rangle + \sqrt{2} \left| \downarrow \uparrow \right\rangle}{\sqrt{3}}$$

Il ne manquent plus que $\left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$ et $\left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$

Astuce : on cherche ces vecteurs sous la forme de combinaisons linéaires de vecteurs de la base produit ayant le même m (v.p. de $\hat{J}_z$)

Vecteur	$\left \uparrow \uparrow \right\rangle$	$\left \uparrow \downarrow \right\rangle$	$\left \downarrow \uparrow \right\rangle$	$\left \downarrow \downarrow \right\rangle$	$\left \uparrow \downarrow \right\rangle$	$\left \downarrow \downarrow \right\rangle$
m	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ on cherche $\left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$ sous la forme $\alpha \left| \uparrow \downarrow \right\rangle + \beta \left| \downarrow \uparrow \right\rangle$

Par orthogonalité avec $\left| \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\left| \downarrow \uparrow \right\rangle + \sqrt{2} \left| \uparrow \downarrow \right\rangle}{\sqrt{3}}$, on

$$\text{choisit : } \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-\sqrt{2} \left| \downarrow \uparrow \right\rangle + \left| \uparrow \downarrow \right\rangle}{\sqrt{3}}$$

Δ Il faut encore vérifier que $J^2 \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

(6)

$$\begin{aligned}
& J^2 \left[\frac{-\sqrt{2} |\downarrow 1\rangle + |\uparrow 0\rangle}{\sqrt{3}} \right] \\
&= [J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}] \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} |\downarrow 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\uparrow 0\rangle \right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3\hbar^2}{4} |\downarrow 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3\hbar^2}{4} |\uparrow 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} 2\hbar^2 |\downarrow 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} 2\hbar^2 |\uparrow 0\rangle \\
&\quad + 2 \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \hbar^2 |\downarrow 1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \hbar^2 \sqrt{2} |\uparrow 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \hbar^2 \sqrt{2} |\downarrow 1\rangle \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}} \hbar^2 |\downarrow 1\rangle \left[\frac{3}{4} + 2 - 1 - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \hbar^2 |\uparrow 0\rangle \left[\frac{3}{4} + 2 - 2 \right] \\
&= \frac{3\hbar^2}{4} \left[\frac{-\sqrt{2} |\downarrow 1\rangle + |\uparrow 0\rangle}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \left[\frac{-\sqrt{2} |\downarrow 1\rangle + |\uparrow 0\rangle}{\sqrt{3}} \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{on a donc bien : } \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} |\downarrow 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\uparrow 0\rangle$$

De même, on cherche $\left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \alpha' |\uparrow; -1\rangle + \beta' |\downarrow 0\rangle$
 et pour assurer l'orthogonalité avec $\left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$ on prend :

$$\left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-\sqrt{2} |\uparrow; -1\rangle + |\downarrow 0\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{et on vérifie que } J^2 \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle)$$

6. Quarks 1 et 2: $j=0$ ou $j=1$

(7)

On ajoute le 3^{em}: $j=\frac{1}{2}$ ou $j=\frac{3}{2}$

$\uparrow$
neutron

$\rightarrow$ possible aussi
(ex: particule Δ_0)

4.2 a) $|11\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

$|1,0\rangle = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

$|0,0\rangle = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

b) $\hat{H} = J \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = \frac{J}{2} (\hat{S}_{1+} \hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-} \hat{S}_{2+}) + J \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z}$

$\hat{H} |11\rangle = \frac{J\hbar^2}{4} |11\rangle$

$\hat{H} |1,-1\rangle = \hat{H} |\downarrow\downarrow\rangle = \frac{J\hbar^2}{4} |1,-1\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{H} |1,0\rangle &= \frac{J}{2} \left[\hat{S}_{1+} \hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-} \hat{S}_{2+} \right] \frac{|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} + J \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z} \frac{|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{J}{2} \hbar^2 \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + J \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(\frac{\hbar}{2}\right) \frac{|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{J\hbar^2}{4} |1,0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} |0,0\rangle &= \frac{J}{2} \left[\hat{S}_{1+} \hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-} \hat{S}_{2+} \right] \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} + J \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z} \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{J}{2} \hbar^2 \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + J \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \left(\frac{\hbar}{2}\right) \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{3J\hbar^2}{4} \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{3J\hbar^2}{4} |0,0\rangle \end{aligned}$$

c) $\frac{J\hbar^2}{4} \rightarrow$ dégénéré 3x (états du triplet)

$-\frac{3J\hbar^2}{4} \rightarrow$ dégénéré 1x (état singulet)

d) Etat fondamental : $\frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

$$E_{\text{site}} = -\frac{3J\hbar^2}{8}$$

Dipôle magnétique : $\hat{\mu}_z = \gamma \hat{S}_{z1} + \gamma \hat{S}_{z2}$

γ = rapport gyromagnétique

$$\hat{\mu}_z |\downarrow\uparrow\rangle = \hat{\mu}_z |\uparrow\downarrow\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\mu}_z \rangle = 0$$

orientations opposées des spins $\Rightarrow$ champ nul en moyenne

$$2. a) \hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 + 2(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \hat{S}_2 \cdot \hat{S}_3 + \hat{S}_3 \cdot \hat{S}_1)$$

$$= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 + \frac{2}{J} \hat{H}$$

(10)

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{J}{2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2 - \hat{S}_3^2)$$

b) $\dim 2^3 = 8$

L'addition de 2 spins $\frac{1}{2}$ donne $s=0$ et $s=1$

En ajoutant le 3^e spin $\frac{1}{2}$, on obtient :

$s=0$ et $\Delta = \frac{1}{2}$: $S_{\text{total}} = \frac{1}{2}$ $\dim 2$

$s=1$ et $\Delta = \frac{1}{2}$ $\nearrow S_{\text{total}} = \frac{1}{2}$ $\dim 2$
 $\searrow S_{\text{total}} = \frac{3}{2}$ $\dim 4$

c) Tous les vecteurs de l'espace des états sont $\vec{r}_p$ de $\hat{S}_{1,2,3}^2$ avec la valeur propre $\frac{3\hbar^2}{4}$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{J}{2} (\hat{S}^2 - \frac{9\hbar^2}{4}) \text{ ne dépend que de } \hat{S}^2$$

$\Rightarrow$ le fondamental correspond à $S_{\text{total}} = \frac{1}{2}$ (dégénéré 4x)

$$\text{et } E = \frac{J}{2} \left(\frac{3\hbar^2}{4} - \frac{9\hbar^2}{4} \right) = -\frac{3\hbar^2}{4} J$$

$$E_{\text{site}} = -\frac{\hbar^2 J}{4}$$

$\Rightarrow$ "frustration magnétique"

