

MQII: Cours 3

Retour sur L'intrication

Rappel:
Produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Espace Produit tensoriel: définition

Définition « pragmatique »

- **Définition:** Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert respectivement de base orthonormée $\{e_i^{(1)}\}_{i=1\dots N_1}$ et $\{e_j^{(2)}\}_{j=1\dots N_2}$.

On appelle espace **produit tensoriel** de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, de base orthonormée $\{f_{ij}\}_{i=1\dots N_1, j=1\dots N_2}$, telle que $\langle f_{ij} | f_{i'j'} \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}$ et notée $f_{ij} = e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$.

On a donc:

$$\langle f_{ij} | f_{i'j'} \rangle = \langle e_i^{(1)} | e_{i'}^{(1)} \rangle \langle e_j^{(2)} | e_{j'}^{(2)} \rangle.$$

- **Conséquences:**

- La dimension de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \times \dim(\mathcal{H}_2)$,
- Un vecteur quelconque $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ s'écrit $\Phi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$

- **Attention** : l'ordre compte, i.e. $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \neq \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$ même lorsque $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2)$.

Produit tensoriel : vecteurs factorisables(diapo1)

Définitions et notations annexes

- ♦ Soit $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$ avec $\phi_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i e_i^{(1)}$ et $\phi_2 = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j e_j^{(2)}$, on note $\phi_1 \otimes \phi_2$ le vecteur de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ défini par $\phi_1 \otimes \phi_2 = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$, i.e. $c_{ij} = \alpha_i \beta_j$.
- Tout vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ **qui peut s'écrire sous la forme** $\Phi = \phi_1 \otimes \phi_2$ est dit « **factorisable** » ou « **séparable** »,
 - Tout vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ **qui ne peut pas s'écrire sous la forme** $\phi_1 \otimes \phi_2$ est dit « **non-factorisable** » ou « **intriqué** » en MQ (« entangled » en anglais): $c_{ij} \neq \alpha_i \beta_j$.
 - Remarque 1: Dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il existe toujours des vecteurs non-factorisables.
 - Remarque 2: Le caractère « factorisable » ou non d'un vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est « intrinsèque »: cela ne dépend pas des bases utilisées dans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

- Notations de Dirac: on peut utiliser la notation rigoureuse $| e_i^{(1)} \rangle \otimes | e_j^{(2)} \rangle$, mais on utilise le plus souvent la notation allégée $|i, j\rangle \equiv | e_i^{(1)} \rangle \otimes | e_j^{(2)} \rangle$ ou $|1\ i, 2\ j\rangle$.

Produit tensoriel : vecteurs factorisables(diapo2)

Manipulations des vecteurs factorisés

◆ Soient $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

- $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$
- $(\alpha \phi_1 + \beta \psi_1) \otimes \phi_2 = \alpha \phi_1 \otimes \phi_2 + \beta \psi_1 \otimes \phi_2$
- $\phi_1 \otimes (\alpha \phi_2 + \beta \psi_2) = \alpha \phi_1 \otimes \phi_2 + \beta \phi_1 \otimes \psi_2$
- Il n'y a qu'un seul vecteur nul: $0 \otimes \phi_2 = \phi_1 \otimes 0 = 0$.

◆ Si on généralise au produit tensoriel de 3 espaces (ou plus) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ alors

$$\forall \phi_1 \in \mathcal{H}_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_2, \phi_3 \in \mathcal{H}_3, (\phi_1 \otimes \phi_2) \otimes \phi_3 = \phi_1 \otimes (\phi_2 \otimes \phi_3) = \phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3$$

◆ Question d'ordre: supposons que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$.

- Soient deux vecteurs $\phi, \psi \in \mathcal{H}_0$ avec $\psi \neq \lambda \phi$, alors $\phi \otimes \psi \neq \psi \otimes \phi$, de la même manière que pour des couples on a $(\phi, \psi) \neq (\psi, \phi)$, i.e. le produit tensoriel est ordonné (ou non-abélien).

Produit tensoriel : opérateurs(diapo1)

Produit tensoriel et opérateurs

◆ **Produit tensoriel d'opérateurs**: Si on a un opérateur $\hat{A}_1$ agissant sur $\mathcal{H}_1$ de base orthonormée $\{e_i^{(1)}\}_{i=1\dots N_1}$ et un opérateur $\hat{A}_2$ agissant sur $\mathcal{H}_2$ de base orthonormée $\{e_j^{(2)}\}_{j=1\dots N_2}$ on peut définir « naturellement » un opérateur $\hat{O} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ agissant sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en posant:

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) (e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}) = (\hat{A}_1 e_i^{(1)}) \otimes (\hat{A}_2 e_j^{(2)})$$

$\hat{A}_1$ « n'agit » que sur la partie venant de $\mathcal{H}_1$ et $\hat{A}_2$ « n'agit » que sur la partie venant de $\mathcal{H}_2$.

Rq1: on utilise le fait que pour définir un opérateur linéaire il suffit de définir son action sur une base.

Rq2: on montre que cette définition de $\hat{O} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ ne dépend pas des bases choisies.

◆ En particulier l'opérateur $\hat{A}_1 = \hat{A}_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ « n'agit que sur $\mathcal{H}_1$ » et $\hat{A}_2 = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{A}_2$ « n'agit que sur $\mathcal{H}_2$ ».

● **Conséquence**: La transformation $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_1$ ou $\hat{A}_2 \rightarrow \hat{A}_2$ permet « d'étendre » l'action des opérateurs définis initialement sur $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ à l'espace « plus grand » $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Produit tensoriel: opérateurs (diapo2)

Manipulation de produits tensoriels d'opérateurs

- ◆ Soient $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$, $\hat{A}_1, \hat{A}'_1: \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1$, $\hat{A}_2, \hat{A}'_2: \mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:
 - $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle \phi_1 | \hat{A}_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \phi_2 | \hat{A}_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$
 - $(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)(\phi_1 \otimes \phi_2) = (\hat{A}_1 \phi_1) \otimes (\hat{A}_2 \phi_2)$
 - $(\alpha \hat{A}_1 + \beta \hat{A}'_1) \otimes \hat{A}_2 = \alpha \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 + \beta \hat{A}'_1 \otimes \hat{A}_2$
 - $\hat{A}_1 \otimes (\alpha \hat{A}_2 + \beta \hat{A}'_2) = \alpha \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 + \beta \hat{A}_1 \otimes \hat{A}'_2$
 - Si $\hat{\mathcal{O}} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ et $\hat{\mathcal{O}}' = \hat{A}'_1 \otimes \hat{A}'_2$ alors $\hat{\mathcal{O}} \cdot \hat{\mathcal{O}}' = (\hat{A}_1 \cdot \hat{A}'_1) \otimes (\hat{A}_2 \cdot \hat{A}'_2)$
 - En particulier si $\hat{\mathbb{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ et $\hat{\mathbb{A}}_2 = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{A}_2$ alors $\hat{\mathbb{A}}_1 \cdot \hat{\mathbb{A}}_2 = \hat{\mathbb{A}}_2 \cdot \hat{\mathbb{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$
 - $(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)^\dagger = \hat{A}_1^\dagger \otimes \hat{A}_2^\dagger$

● **Remarque:** Souvent en MQ on confond les opérateurs $\hat{A}_1$ et $\hat{\mathbb{A}}_1$ (de même pour $\hat{A}_2$ et $\hat{\mathbb{A}}_2$) car l'identité ($I_{\mathcal{H}_2}$ ou $I_{\mathcal{H}_1}$) « n'a pas d'effet », et cet abus permet de « simplifier les notations ». On trouvera alors des « produits » $\hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$ à la place de $\hat{\mathbb{A}}_1 \cdot \hat{\mathbb{A}}_2$... au premier abord cela peut introduire des confusions pour un non-initié.

Produit tensoriel: projecteurs orthogonaux

Manipulation de projecteurs orthogonaux

◆ Soient $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$, $\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = 1$ et $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$, $\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1$.

On définit les projecteurs orthogonaux $\hat{\Pi}_{\phi_1} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$ et $\hat{\Pi}_{\phi_2} = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$:

$$\hat{\Pi}_{\phi_1} \otimes \hat{\Pi}_{\phi_2} = \hat{\Pi}_{\phi_1 \otimes \phi_2} \equiv |\phi_1, \phi_2\rangle\langle\phi_1, \phi_2|$$

avec $|\phi_1, \phi_2\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ et $\langle\phi_1, \phi_2| \stackrel{\text{def}}{=} \langle\phi_1| \otimes \langle\phi_2|$

◆ Rappel: si $\{e_n\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_2$ alors $I_{\mathcal{H}_2} = \sum_n \hat{\Pi}_{e_n} = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|$

◆ On a: $\hat{\Pi}_{\phi_1} \otimes I_{\mathcal{H}_2} = \sum_n \hat{\Pi}_{\phi_1} \otimes \hat{\Pi}_{e_n} = \sum_n \hat{\Pi}_{\phi_1 \otimes e_n} \equiv \sum_n |\phi_1, e_n\rangle\langle\phi_1, e_n|$

◆ Si $\hat{A}$ est une observable sur $\mathcal{H}_1$ avec $\hat{A}|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle \Rightarrow \hat{A} = \sum_n a_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \sum_n a_n \hat{\Pi}_{\phi_n}$
d'où

$$\hat{A} = \hat{A} \otimes I_{\mathcal{H}_2} = \sum_n a_n \hat{\Pi}_{\phi_n} \otimes I_{\mathcal{H}_2} = \sum_{n,m} a_n \hat{\Pi}_{\phi_n \otimes e_m} \equiv \sum_{n,m} a_n |\phi_n, e_m\rangle\langle\phi_n, e_m|$$

◆ Remarque: $I_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = I_{\mathcal{H}_1} \otimes I_{\mathcal{H}_2}$

Application: Systèmes à « deux parties » Intrication

Systemes à « deux parties »

- **Hypothèse**: On a un système **S1** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et un système **S2** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$.
- **Question**: Quel est l'espace des états du système **S = S1+S2** ?

Réponse



- L'espace des états du système **S = S1+S2** est l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

◆ L'espace $\mathcal{H}$ contient des états « **factorisés** » de la forme $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ dans lesquels le système **S1** est dans l'état $|\phi_1\rangle$ et le système **S2** est dans l'état $|\phi_2\rangle$,

◆ Mais l'espace $\mathcal{H}$ contient aussi des états « **non-factorisables** » ou « **intriqués** » qui ne peuvent pas se mettre sous la forme $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$. Dans ces cas « intriqués » les parties **S1** et **S2** du système **S** **ne peuvent pas être associées à un état bien défini**.



Conclusion: Dans des **états intriqués**, les parties d'un système ne vérifient plus le Postulat 1 !!!!.

« Non-séparabilité »

● Interprétation de la conclusion précédente

La conclusion précédente signifie que dans un état intriqué le système global $S = S1 + S2$ possède un ensemble de propriétés (ensemble de corrélations entre $S1$ et $S2$: ensemble non-intuitif; très difficile à exprimer en langage courant) qui ne peut pas être expliqué par la simple « somme » de propriétés séparées (on dit aussi locales), « existant » au niveau de $S1$ et $S2$.

Remarque 1: Des corrélations particulières entre $S1$ et $S2$ regardées de manière isolées ont souvent une interprétation « locale » possible, **mais pas l'ensemble de toutes les corrélations.**

Remarque 2: Pour distinguer « l'intrication quantique » de la simple « **corrélation classique entre événements d'origine locale** », il faut avoir la **preuve** qu'IL **N'EXISTE PAS D'EXPLICATION « LOCALE » POSSIBLE**....C'est difficile
=> Inégalités de Bell ou BCHSH (version plus pratique due à Clauser, Horne, Shimony et Holt en 1969)

Ref: J. S. Bell, « On the problem of hidden variables in quantum mechanics », Rev. Mod. Phys., **38**, 447-452 (1966).

Ref: J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).

Remarque importante: « Les problèmes d'interprétation »

- Tous les « problèmes », étrangetés, « paradoxes » éventuels, « contradictions apparentes », questions « d'interprétations », qui se manifestent avec l'intrication résultent pour l'essentiel du « compromis initial » choisi avec les postulats:
 - **Les postulats fournissent le formalisme et les méthodes de calculs pour obtenir tout ce qui est observable:**
 - valeurs possibles de mesure, probabilités, valeurs moyennes, évolution des systèmes, effet d'une mesure etc,
 - **Mais :**
 - **1^{er}** les postulats ne précisent pas « comment se représenter mentalement » un objet quantique « en lui-même », par comparaison/opposition à ce qu'est un objet « classique »,
 - **2^{ième}** En conséquence, les postulats ne disent pas non plus ce que les objets mathématiques (kets, observables etc..) représentent « vraiment » de cet éventuel « objet quantique en lui-même »,
 - **3^{ième}** Il résulte des deux points précédents que les « raisonnements physiques profonds » basés sur « l'intuition » de ce qu'est (ou devrait être) la « réalité en soi » des objets (en connexion avec le formalisme) deviennent « sujet à polémiques », sauf à formuler des tests expérimentaux réalisables de ces idées (type inégalités BCHSH).
- L'intrication quantique avec ses faits expérimentaux avérés, conformes aux prédictions du formalisme, et ses « problèmes d'interprétation » ne fait que mettre en lumière, de façon éclatante, les points forts ET les points faibles du cadre des « postulats standard »: c'était précisément l'idée d'Einstein & al. avec l'article EPR.

Systemes à « deux parties »: observables

• **Hypothèse:** On a un système **S1** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et un système **S2** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$. L'espace des états du système **S = S1+S2** est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

♦ **Question:** Comment décrire les observables « propres à S1 et S2 » dans le cadre de l'espace produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$?

Vocabulaire: les observables « propres à S1 et S2 » sont dites « locales ».

♦ **Réponse:** Si $\hat{A}_1$ est une observable de S1 agissant sur $\mathcal{H}_1$, alors $\hat{\mathbb{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ représente la même propriété dans le cadre de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (même chose pour S2: $\hat{A}_2 \mapsto \hat{\mathbb{A}}_2 = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{A}_2$).

♦ **Question:** Comment décrire les observables $\hat{\mathcal{O}}$ propres à l'ensemble **S = S1+S2** et qui ne sont donc pas « locales » mais « globales »?

♦ **Réponse:** Elles sont typiquement des sommes et produits d'observables locales :

$$\hat{\mathcal{O}} = \alpha \hat{\mathbb{A}}_1 + \beta \hat{\mathbb{B}}_2 + \gamma \hat{\mathbb{C}}_1 \cdot \hat{\mathbb{D}}_2$$

Systèmes à « deux parties »: mesures & probabilités

- ◆ **Hypothèses:** On a un système **S1** avec un espace des états $\mathcal{H}_1$ et un système **S2** avec un espace des états $\mathcal{H}_2$.
Donc l'espace des états du système **S = S1+S2** est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
 - On a une observable « locale » $\hat{A}$ de S1 (non-dégénérée pour simplifier) avec $\hat{A}|a_m\rangle = a_m|a_m\rangle$
 - On a une observable « locale » $\hat{B}$ de S2 (non-dégénérée pour simplifier) avec $\hat{B}|b_n\rangle = b_n|b_n\rangle$
 - Conséquence: Les $|a_m, b_n\rangle \equiv |a_m\rangle \otimes |b_n\rangle$ forment une base orthonormée de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
 - Le système **S = S1+S2** est dans l'état $|\Phi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $|\Phi\rangle$ à priori intriqué.

◆ **Questions:**

- Si on fait une mesure de $\hat{A}$ (donc sur S1) quelle est la probabilité $\mathcal{P}(a_m)$ d'observer la valeur a_m ?
- Si on fait une mesure de $\hat{B}$ (donc sur S2) quelle est la probabilité $\mathcal{P}(b_n)$ d'observer la valeur b_n ?
- Peut-on faire une mesure conjointe de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$? (Physiquement on devrait pouvoir le faire!)
- Si oui, quelle est la probabilité $\mathcal{P}(a_m, b_n)$ d'observer la valeur a_m de $\hat{A}$ et la valeur b_n de $\hat{B}$?

◆ **Méthode:** Les postulats de la MQ parlent d'un seul système (pas deux) => il faut tout exprimer en termes du système global **S = S1+S2** => on convertit $\hat{A}$ et $\hat{B}$ en $\hat{\mathbb{A}} = \hat{A} \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ et $\hat{\mathbb{B}} = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{B}$.

- ◆ On a $\hat{\mathbb{A}} \cdot \hat{\mathbb{B}} = \hat{\mathbb{B}} \cdot \hat{\mathbb{A}} = \hat{A} \otimes \hat{B} \Rightarrow [\hat{\mathbb{A}}, \hat{\mathbb{B}}] = 0 \Rightarrow$ Confirmation: une mesure conjointe de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$ est possible:
 $\hat{\mathbb{A}}|a_m, b_n\rangle = a_m|a_m, b_n\rangle$ et $\hat{\mathbb{B}}|a_m, b_n\rangle = b_n|a_m, b_n\rangle$

Systeme à « deux parties »: mesures & probabilités

- ◆ Probabilités d'une Mesure Conjointe de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$:

Application de la Règle de Born: $\mathcal{P}(a_m, b_n) = |\langle a_m, b_n | \Phi \rangle|^2$

- ◆ Probabilités pour une mesure de $\hat{A}$ seulement :

$$\mathcal{P}(a_m) = \sum_n \mathcal{P}(a_m, b_n) = \sum_n |\langle a_m, b_n | \Phi \rangle|^2 = \langle \Phi | |a_m\rangle \langle a_m| \otimes I_{\mathcal{H}_2} | \Phi \rangle$$

=> $\mathcal{P}(a_m)$ ne dépend BIEN ENTENDU que de $\hat{A}$ (pas de $\hat{B}$).

- ◆ Probabilités pour une mesure de $\hat{B}$ seulement :

$$\mathcal{P}(b_n) = \sum_m \mathcal{P}(a_m, b_n) = \sum_m |\langle a_m, b_n | \Phi \rangle|^2 = \langle \Phi | I_{\mathcal{H}_1} \otimes |b_n\rangle \langle b_n| | \Phi \rangle$$

=> $\mathcal{P}(b_n)$ ne dépend BIEN ENTENDU que de $\hat{B}$ (pas de $\hat{A}$).

- ◆ Probabilités conditionnelles: Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(b_n | a_m)$ d'observer la valeur b_n de $\hat{B}$ si on sait que l'on a observé la valeur a_m de $\hat{A}$?

Par définition (classique): $\mathcal{P}(b_n | a_m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{P}(b_n \text{ et } a_m)}{\mathcal{P}(a_m)} = \frac{\mathcal{P}(a_m, b_n)}{\mathcal{P}(a_m)} = \frac{|\langle a_m, b_n | \Phi \rangle|^2}{\sum_{n'} |\langle a_m, b_{n'} | \Phi \rangle|^2}$

Systèmes à « deux parties »: Etat après une mesure locale

♦ Supposons que l'on effectue une mesure de $\hat{A}$ sur **S1** et que l'on obtienne la valeur a_{m_0} quel est état $|\Phi'\rangle$ du système complet (S1+S2) après la mesure?

♦ Postulat « de réduction du paquet d'ondes »:

$$|\Phi'\rangle \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}(a_{m_0})}} \sum_n |a_{m_0}, b_n\rangle \langle a_{m_0}, b_n | \Phi\rangle = |a_{m_0}\rangle \otimes \sum_n \frac{\langle a_{m_0}, b_n | \Phi\rangle}{\sqrt{\mathcal{P}(a_{m_0})}} |b_n\rangle$$

$\Rightarrow \forall |\Phi\rangle$ initial (intriqué ou pas) l'état $|\Phi'\rangle$ après la mesure est « **DESINTRIQUE** » (factorisé)

$\Rightarrow$ **S1** est dans l'état $|a_{m_0}\rangle$ et **S2** dans l'état $|\psi(a_{m_0})\rangle = \sum_n \frac{\langle a_{m_0}, b_n | \Phi\rangle}{\sqrt{\mathcal{P}(a_{m_0})}} |b_n\rangle$.

♦ Quelle est la probabilité $\mathcal{P}'(b_n)$ (maintenant) d'obtenir la valeur b_n dans une mesure de $\hat{B}$?

♦ Règle de Born:

$$\mathcal{P}'(b_n) = |\langle b_n | \psi(a_{m_0}) \rangle|^2 = \frac{|\langle a_{m_0}, b_n | \Phi \rangle|^2}{\mathcal{P}(a_{m_0})} = \frac{|\langle a_{m_0}, b_n | \Phi \rangle|^2}{\sum_{n'} |\langle a_{m_0}, b_{n'} | \Phi \rangle|^2} \equiv \mathcal{P}(b_n | a_{m_0})$$

On retrouve les probabilités conditionnelles « classiques »

Systemes à « deux parties »: un « paradoxe ? »

♦ Résumé: Le système **S1+S2** est dans l'état intriqué $|\Phi\rangle$. On sait qu'alors les parties S1 et S2 n'ont pas d'état quantique bien définis.

On fait une mesure de $\hat{A}$ sur **S1** et on obtient la valeur a_{m_0} . L'état $|\Phi'\rangle$ du système complet (**S1+S2**) après la mesure est alors « désintriqué »: $|\Phi'\rangle = |a_{m_0}\rangle \otimes |\psi(a_{m_0})\rangle$ avec $|\psi(a_{m_0})\rangle = \mathcal{P}(a_{m_0})^{-1/2} \sum_n \langle a_{m_0}, b_n | \Phi \rangle |b_n\rangle$

♦ Question (paradoxe?): Comment une mesure seulement sur S1 (possiblement très éloigné de S2) peut-elle avoir un « effet » sur S2 en « rendant défini » l'état de S2 qui ne l'était pas?

♦ Début de Réponse: Le paradoxe dépend en grande partie de l'interprétation que l'on donne à « un état quantique », une « observable », une « mesure » etc...bref de « l'interprétation des postulats », c'est-à-dire du lien entre les postulats et « le monde objectif/réel » => sujet très délicat (limite subjectif) d'où les difficultés et les nombreuses discussions.

Pourquoi « limite subjectif »?: une démarche d'interprétation « poussée trop loin » peut dépasser le « compromis standard » qui « refuse » d'aller dans la direction « d'interprétation » à cause précisément des paradoxes possibles.

D'où vient le paradoxe ici?: De la formulation de la question qui utilise les postulats de la MQ (théorie statistique) en les appliquant à des systèmes uniques (voir diapo suivante).

Systèmes à « deux parties »: un « paradoxe? »

♦ Je me limite ici à « l'interprétation standard de la MQ ».

Voir plus loin (inégalités BCHSH) pour ce qui concerne l'hypothèse des « variables cachées ».

♦ Retour sur « l'interprétation standard » des postulats

- **1^{er}** Un état quantique décrit une situation statistique particulière relative à une classe d'objets: Autrement dit, un état quantique qualifie une « collection » d'objets (une « classe d'équivalence » d'objets) ayant en commun un comportement statistique « fondamental » (probabilités intrinsèques). Les états sont des sortes de « boîtes abstraites » dans lesquelles on « range » les objets.
- **2^{ème}** Le Postulat 1 de la MQ affirme qu'un objet « isolé », appartient à une (et une seule) de ces « classes d'équivalence », de ces « boîtes », décrite par un « ket » $|\psi\rangle$.
- **3^{ème}** Une autre façon de se représenter un état $|\psi\rangle$ est de dire que $|\psi\rangle$ est « un état de préparation le plus fin possible », par exemple les photons après un polariseur sont « préparés » dans un état donné fixé par le polariseur.

Systèmes à « deux parties »: un « paradoxe? »

♦ Question (paradoxe?): Comment une mesure seulement sur S1 peut-elle avoir un « effet » sur S2 en «rendant défini » l'état de S2 qui n'était pas défini avant?

Raisonnement sans paradoxe:

- 1^{er} L'état intriqué $|\Phi\rangle$ représente une classe d'objets S de la forme (S1,S2).
- 2^{ème} Dans cette classe de paires, l'ensemble des objets S1 d'un côté (pris à part) et celui des objets S2 de l'autre ne peuvent pas être représentés par un état quantique bien défini. Il s'agit d'un nouveau type d'indétermination: un « mélange statistique d'états » (on en reparlera). Les objets S1 (ou S2) peuvent avoir différents états possibles.
- 3^{ème} Maintenant si l'on extrait (par une mesure) de l'ensemble de tous les S1 ceux appartenant uniquement à une classe décrite par un état $|\phi\rangle = |a_{m_0}\rangle$, alors l'ensemble des S2 issus de ces paires (S1,S2) et seulement ceux-là, sont alors décrits eux aussi par un seul état $|\psi(a_{m_0})\rangle$ selon nos résultats.
- 4^{ème} Il y a bien une action « indirecte » de l'observateur: celle de sélection des S2 admissibles.
- 5^{ème} Le résultat signifie que l'état intriqué $|\Phi\rangle$ des paires (S1,S2) spécifie une « classe de paires (S1,S2) » qui encode une corrélation « quantique spécifique » entre les objets S1 et S2.

Conclusion: A ce niveau d'interprétation il « ne semble pas » y avoir de paradoxe.

**Exemples de systèmes intriqués les plus
simples:**

$$\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2) = 2$$

&

Inégalités de Bell (BCHSH)

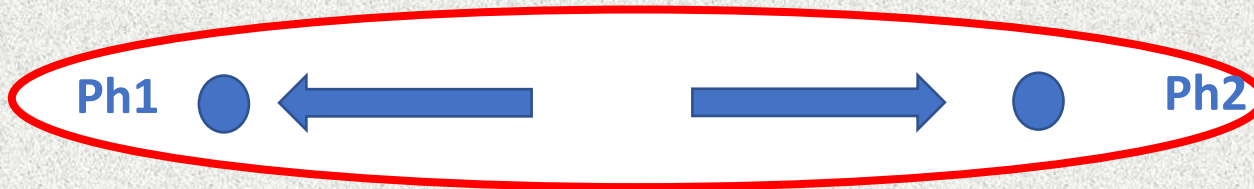
Cas des photons

2 photons intriqués en polarisation

● **Rappels**: Si on suppose que les photons se déplacent dans la direction Oz, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des états de polarisation d'un photon est $\mathcal{H} = \{|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ où $|x\rangle$ et $|y\rangle$ représentent les états de polarisation rectiligne selon les directions Ox et Oy.

● **Hypothèse 1**: On considère **2 photons Ph1 et Ph2 se propageant dans la direction Oz avec des impulsions opposées** et on s'intéresse uniquement à leurs degrés de liberté de polarisation.

- L'espace de Hilbert de Ph1+Ph2 est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de base $|1: x \text{ ou } y\rangle \otimes |2: x \text{ ou } y\rangle$

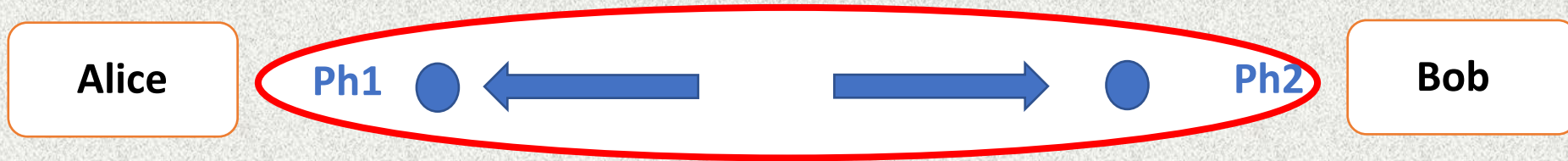


● **Hypothèse 2**: On s'intéresse à des états intriqués du système Ph1+Ph2 par exemple:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1:x\rangle \otimes |2:y\rangle - |1:y\rangle \otimes |2:x\rangle)$$

● **Hypothèse 3**: On fait des mesures de polarisation sur Ph1 et Ph2.

Le langage de la cryptographie quantique (diapo 1)



● **Hypothèse 1:** Les 2 photons Ph1 et Ph2 qui se propagent dans la direction Oz avec des impulsions opposées sont « très éloignés ».

● **Hypothèse 2:**

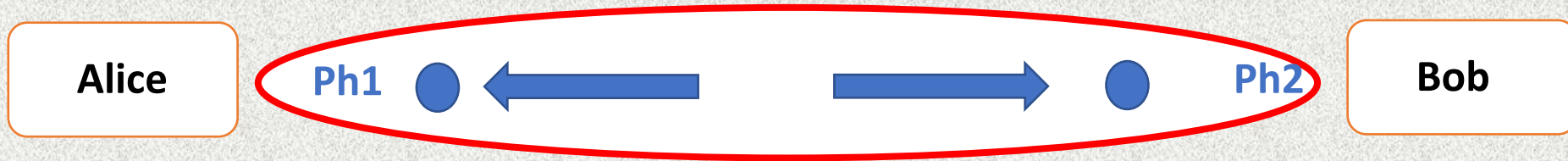
- L'observateur de Ph1 s'appelle « Alice », i.e. Alice fait des mesures de polarisation sur Ph1
- L'observateur de Ph2 s'appelle « Bob », i.e. Bob fait des mesures de polarisation sur Ph2
- Alice et Bob « partagent » des photons à priori intriqués préparés dans un état $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}$.

● **Observables mesurables** par Alice et Bob: on suppose qu' Alice et Bob font des mesures de polarisation rectiligne :

- Soit avec des « polariseurs absorbants P_θ » représentés par les observables $\hat{\Pi}_\theta = |\theta\rangle\langle\theta|$
où $|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle$
- Soit avec des « WP » (Wollaston Prisms) représentés par $\hat{W}_\theta = \hat{\Pi}_\theta - \hat{\Pi}_{\theta+\pi/2}$.

Remarque: une « mesure réelle » est réalisée par un ensemble « polariseur + détecteur » et le photon est en général toujours détruit par le détecteur. Dans ce cas on ne peut plus parler de l'état « après la mesure ».

Le langage de la cryptographie quantique (diapo 2)



● Questions pratiques :

- Que peuvent dire en terme de probabilités de mesure Alice et Bob seuls?
- Que peut dire Alice si elle connaît les résultats de mesure de Bob ? (ou l'inverse)
- Peut-on construire à partir de là un moyen de communication crypté et sécurisé?

● Question(s) théorique(s) testables expérimentalement:

- Les prédictions de la MQ sont-elles compatibles avec un modèle « classique » où Ph1 et Ph2 ont uniquement des « propriétés locales »: réponse non.
- Peut-on trouver un test différenciant les deux types de prédiction: réponse oui (inégalités)
- Peut-on faire ce test expérimentalement: réponse oui (« violation » des inégalités de Bell ou celles dites BCHSH).

Les 4 « états intriqués de Bell »



- J. Bell a défini 4 états intriqués particuliers:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |y\rangle + |y\rangle \otimes |x\rangle) \quad \text{et} \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |y\rangle - |y\rangle \otimes |x\rangle)$$
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle) \quad \text{et} \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |x\rangle - |y\rangle \otimes |y\rangle)$$

- Les 4 états constituent une base orthonormée de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

- L'état $|\Psi^-\rangle$ est le seul état « invariant par rotation »:

$$\forall \theta, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta\rangle \otimes |\theta + \pi/2\rangle - |\theta + \pi/2\rangle \otimes |\theta\rangle)$$

➡ C'est avec cet état $|\Psi^-\rangle$ que l'on trouve de nombreux calculs « pédagogiques ».

➡ L'état $|\Phi^+\rangle$ est celui qui a été utilisé par J. Clauser et A. Aspect dans leur expérience à l'origine de leur prix Nobel en 2022.

**Cas des Electrons:
&
Inégalités BCHSH**

2 électrons intriqués en spin

Rappels: Les degrés de liberté de spin (spin $\frac{1}{2}$) d'un électron sont représentés par un espace de Hilbert de dimension 2. La composante $\hat{S}_z$ dans la direction Oz a une base de vecteurs propres $|\pm, z\rangle$ tels que $\hat{S}_z|\pm, z\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm, z\rangle$.

Hypothèse 1: On considère **2 électrons E1 et E2** et on s'intéresse uniquement à leurs degrés de liberté de spin.

- On a donc 2 opérateurs de spin $\hat{S}_z^{(1)}$ et $\hat{S}_z^{(2)}$ dans la direction Oz pour E1 et E2,
- L'espace de Hilbert de E1+E2 est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de base $|1\pm, z\rangle \otimes |2\pm, z\rangle$,
- On « étend » les opérateurs $\hat{S}_z^{(1)}$ et $\hat{S}_z^{(2)}$ à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en posant:
$$\hat{\mathbb{S}}_z^{(1)} = \hat{S}_z^{(1)} \otimes I_{\mathcal{H}_2} \text{ et } \hat{\mathbb{S}}_z^{(2)} = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{S}_z^{(2)}.$$
- On définit le « spin total » suivant Oz en posant $\hat{S}_z = \hat{\mathbb{S}}_z^{(1)} + \hat{\mathbb{S}}_z^{(2)}$.

Hypothèse 2: On s'intéresse à l'état $|\Psi^-\rangle$ du système E1+E2 défini par:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1+, z\rangle \otimes |2-, z\rangle - |1-, z\rangle \otimes |2+, z\rangle)$$

Electrons intriqués: propriétés de $|\Psi^-\rangle$ (diapo1)

Propriétés de l'état $|\Psi^-\rangle$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1+, z\rangle \otimes |2-, z\rangle - |1-, z\rangle \otimes |2+, z\rangle)$$

♦ $|\Psi^-\rangle$ est un état propre de $\hat{S}_z = \hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}$: $\hat{S}_z |\Psi^-\rangle = 0$. En fait si l'on définit les opérateurs $\hat{S}_x = \hat{S}_x^{(1)} + \hat{S}_x^{(2)}$ et $\hat{S}_y = \hat{S}_y^{(1)} + \hat{S}_y^{(2)}$ on a aussi $\hat{S}_x |\Psi^-\rangle = \hat{S}_y |\Psi^-\rangle = 0$.



Dans l'état $|\Psi^-\rangle$ l'ensemble E1+E2 des deux électrons a **un spin nul** !

Remarque mathématique: Dans un espace de Hilbert de dim=2, à tout vecteur normalisé $|\phi\rangle$ on peut associer un unique vecteur normalisé $|\phi^\perp\rangle$ tel que $\{|\phi\rangle, |\phi^\perp\rangle\}$ soit une base orthonormée.

♦ On montre alors que $\forall |\phi\rangle, |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle)$ (voir diapo suivante)

♦ Dit autrement pour « définir » cet état $|\Psi^-\rangle$ du système E1+E2 **il n'est pas nécessaire** de dire quels sont les états de E1 et E2 intervenant dans $|\Psi^-\rangle$, **il suffit de dire qu'ils sont orthogonaux**.



Les propriétés « individuelles » de E1 et E2 ne sont pas définies.

Electrons intriqués: propriétés de $|\Psi^-\rangle$ (diapo2)

$$\text{Preuve de } \forall |\phi\rangle, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle)$$

♦ Tout vecteur $|\phi\rangle$ normalisé s'écrit (à un facteur de phase $e^{i\alpha}$ près) dans la base $|\pm, z\rangle$:
 $|\phi\rangle = \cos \theta/2 |+, z\rangle + \sin \theta/2 e^{i\varphi} |-, z\rangle$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$

♦ On déduit que le vecteur normalisé $|\phi^\perp\rangle$ orthogonal à $|\phi\rangle$ s'écrit (toujours à un facteur de phase près) et encore dans la base $|\pm, z\rangle$:

$$|\phi^\perp\rangle = -\sin \theta/2 e^{-i\varphi} |+, z\rangle + \cos \theta/2 |-, z\rangle$$

♦ Un calcul direct de $|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle$ (bon exercice) donne:

$$|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle = |1+, z\rangle \otimes |2-, z\rangle - |1-, z\rangle \otimes |2+, z\rangle$$

$$\Rightarrow \text{D'où } \forall |\phi\rangle, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle)$$

Calculs de probabilités (diapo 1)

- ♦ **Hypothèse:** On suppose que l'état des paires d'électrons est $|\Psi^-\rangle$ et de plus
 - l'on mesure sur E1 la composante du spin dans la direction du vecteur directeur $\vec{u}$, soit l'observable
 - $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)} = \vec{u} \cdot \vec{\hat{S}}^{(1)} = u_x \hat{S}_x^{(1)} + u_y \hat{S}_y^{(1)} + u_z \hat{S}_z^{(1)}$, (val. Propres $\pm \frac{\hbar}{2}$)
 - l'on mesure sur E2 la composante du spin dans la direction du vecteur directeur $\vec{v}$, soit l'observable
 - $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)} = \vec{v} \cdot \vec{\hat{S}}^{(2)} = v_x \hat{S}_x^{(2)} + v_y \hat{S}_y^{(2)} + v_z \hat{S}_z^{(2)}$, (val. Propres $\pm \frac{\hbar}{2}$)
- ♦ **Question:** Quelles sont les probabilités jointes $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1 \frac{\hbar}{2}, \epsilon_2 \frac{\hbar}{2})$ d'observer les paires de résultats $(\epsilon_1 \frac{\hbar}{2}, \epsilon_2 \frac{\hbar}{2})$ avec $\epsilon_1 = \pm 1$ et $\epsilon_2 = \pm 1$ pour les deux observables $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ et $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ mesurées ensemble?

- ♦ **Réponse:** Un calcul un peu long donne le résultat simple:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) \equiv \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\left(\epsilon_1 \frac{\hbar}{2}, \epsilon_2 \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4} (1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \vec{u} \cdot \vec{v})$$

- ♦ **Conséquences:**

- Une mesure seulement de $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ sur E1 ou seulement de $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ sur E2 donne comme probabilités
$$\mathcal{P}_{\vec{u}}(\epsilon_1) = \sum_{\epsilon_2} \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathcal{P}_{\vec{v}}(\epsilon_2) = \sum_{\epsilon_1} \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{2}$$
- La probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1|\epsilon_2)$ d'obtenir la valeur ϵ_1 pour $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ si on a déjà observé ϵ_2 pour $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ est
$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1|\epsilon_2) = \frac{\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{P}_{\vec{v}}(\epsilon_2)} = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \vec{u} \cdot \vec{v})$$

Corrélations

♦ Résumé:

- Une mesure seulement de $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ sur E1 ou seulement de $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ sur E2 donne comme probabilités
$$\mathcal{P}_{\vec{u}}(\epsilon_1) = \sum_{\epsilon_2} \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathcal{P}_{\vec{v}}(\epsilon_2) = \sum_{\epsilon_1} \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{2}$$
- La probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1|\epsilon_2)$ d'obtenir la valeur ϵ_1 pour $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ si on a déjà observé ϵ_2 pour $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ est

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1|\epsilon_2) = \frac{\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{P}_{\vec{v}}(\epsilon_2)} = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \vec{u} \cdot \vec{v})$$

♦ Interprétation des résultats:

- Une mesure sur E1 de $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$, quel que soit $\vec{u}$, donne un résultat totalement aléatoire
- Une mesure sur E2 de $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$, quel que soit $\vec{v}$, donne aussi un résultat totalement aléatoire
- Mais $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{u}}(\epsilon_1|\epsilon_2) = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_1 \epsilon_2) \Rightarrow \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{u}}(-\epsilon|\epsilon) = 1$: on a des corrélations parfaites si on mesure la même observable $\hat{S}_{\vec{u}}$ sur les deux électrons (et toujours quel que soit $\vec{u}$!!!)

♦ Question:

Comment expliquer à la fois le caractère complètement aléatoire et la corrélation parfaite quel que soit $\vec{u}$?

♦ C'est l'objet de l'article « EPR » et la raison du développement des théories « à variables cachées » . L'établissement par J.Bell, J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt et d'autres d'inégalités permettant de discerner ces théories des prédictions de la MQ a été un point important dans la « compréhension » de l'intrication quantique. Cela a marqué le tout début de la cryptographie quantique (et aussi de l'information quantique).

Valeurs moyennes, Fonction de Corrélation Quantique

♦ **Probabilités de mesures:** $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) \equiv \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\left(\epsilon_1 \frac{\hbar}{2}, \epsilon_2 \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \vec{u} \cdot \vec{v})$

♦ **Valeurs moyennes:** on cherche la valeur moyenne du produit d'observables $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)} \cdot \hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ dont les valeurs propres sont $\epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\hbar^2}{4}$

$$E(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \hat{S}_{\vec{u}}^{(1)} \cdot \hat{S}_{\vec{v}}^{(2)} \right\rangle = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\hbar^2}{4} \mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = -\frac{\hbar^2}{4} \vec{u} \cdot \vec{v}$$

♦ Imaginons maintenant que

- l'on choisisse 2 directions $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour l'électron E1.
- l'on choisisse 2 directions $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ pour l'électron E2.

♦ Comme $[\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}, \hat{S}_{\vec{u}'}^{(1)}] \neq 0$ (de même $[\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}, \hat{S}_{\vec{v}'}^{(2)}] \neq 0$) d'après les postulats de la MQ on ne peut pas mesurer en même temps $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$ et $\hat{S}_{\vec{u}'}^{(1)}$ (de même pour $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$ et $\hat{S}_{\vec{v}'}^{(2)}$).

Question: est-ce parce que ces deux valeurs « n'existent pas » en même temps, ou est-ce parce que « la nature » nous empêche de les voir? => on peut trouver un critère testable expérimentalement.

♦ Imaginons 4 expériences de mesure (basées sur le même état quantique initial $|\Psi^-\rangle$ des paires) dans lesquelles on mesure successivement $E(\vec{u}, \vec{v})$, $E(\vec{u}', \vec{v})$, $E(\vec{u}, \vec{v}')$, $E(\vec{u}', \vec{v}')$ et définissons

$$S_Q = E(\vec{u}, \vec{v}) - E(\vec{u}, \vec{v}') + E(\vec{u}', \vec{v}) + E(\vec{u}', \vec{v}')$$

On a

$$S_Q = -\frac{\hbar^2}{4} \{ \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') + \vec{u}' \cdot (\vec{v} + \vec{v}') \}$$

Fonction de Corrélation Quantique S_Q

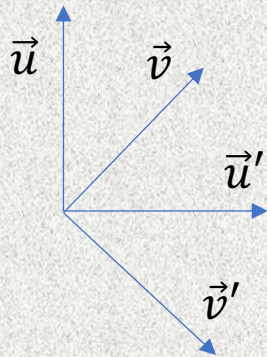
♦ On a 4 expériences de mesure (basées sur le même état quantique initial $|\Psi^-\rangle$ des paires) dans lesquelles on mesure successivement $E(\vec{u}, \vec{v})$, $E(\vec{u}', \vec{v})$, $E(\vec{u}, \vec{v}')$, $E(\vec{u}', \vec{v}')$ et on définit

$$S_Q = E(\vec{u}, \vec{v}) - E(\vec{u}, \vec{v}') + E(\vec{u}', \vec{v}) + E(\vec{u}', \vec{v}')$$

On a

$$S_Q = -\frac{\hbar^2}{4} \{ \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') + \vec{u}' \cdot (\vec{v} + \vec{v}') \}$$

♦ On choisit les 4 vecteurs comme suit



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}' = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_Q = -\frac{\hbar^2}{4} \times (2\sqrt{2})$$

♦ Nous allons montrer que ce résultat est incompatible avec « l'existence simultanée » (donc au sens classique) de 4 valeurs « locales » pour les observables $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}$, $\hat{S}_{\vec{u}'}^{(1)}$, $\hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}$, $\hat{S}_{\vec{v}'}^{(2)}$ pour chaque « tirage » de paire E1-E2.

Remarque: on admettra quand même que pour une raison inconnue seules existent les valeurs propres $\pm \frac{\hbar}{2}$ de ces 4 observables.

Théories « à variables cachées locales »

♦ **Hypothèse des variables cachées**: Supposons qu'au niveau de chaque paire E1-E2 il existe des « variables cachées » (donc non-observables) $\lambda \in \mathbb{R}^n$ que l'on ne peut pas « contrôler », et que ces variables « de type grandeurs classiques » entraînent les probabilités observées.

- Les valeurs observées des « observables quantiques » $\hat{S}_{\vec{u}}^{(1)}, \hat{S}_{\vec{u}'}^{(1)}, \hat{S}_{\vec{v}}^{(2)}, \hat{S}_{\vec{v}'}^{(2)}$ (via les valeurs propres) sont simplement des fonctions $s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda), s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda), s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda), s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)$ qui ne peuvent prendre que les valeurs $\pm \frac{\hbar}{2}$.
- Ces quantités sont « locales », i.e. $s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda)$ et $s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda)$ sont « portées » par l'électron E1 et $s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda)$ et $s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)$ sont portées par E2.

Remarque: on suppose donc que $s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda)$ et $s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda)$ d'un côté (ou $s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda)$ et $s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)$ de l'autre) « existent » en même temps, même si on est incapable de les mesurer pour une raison inconnue.

♦ **Raisonnement BCHSH**

- Reprenons alors la quantité de corrélation $s(\lambda)$ définie maintenant pour chaque tirage de paire E1-E2:

$$s(\lambda) = s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda) - s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda) + s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda) + s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)$$

$$\Rightarrow s(\lambda) = s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda) \{s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda) - s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)\} + s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda) \{s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda) + s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)\}$$

- Mais $s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda) = \pm s_{\vec{v}'}^{(2)}(\lambda)$ donc ou bien $s(\lambda) = 2s_{\vec{u}'}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda)$ ou bien $s(\lambda) = 2s_{\vec{u}}^{(1)}(\lambda)s_{\vec{v}}^{(2)}(\lambda)$

- Conclusion $s(\lambda) = \pm 2 \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow -2 \frac{\hbar^2}{4} \leq \langle s(\lambda) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} S_{VC} \leq +2 \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow |S_{VC}| \leq \frac{\hbar^2}{4} \times 2$

Inégalité BCHCH et leur « violation »

♦ Conclusion du modèle « à variables cachées locales » BCHSH:

Si le modèle est correct le facteur de corrélation « S » doit toujours vérifier

$$|S| \leq \frac{\hbar^2}{4} \times 2 \quad \leftarrow \text{Inégalité BCHSH}$$

♦ **Remarque:** La conclusion précédente reste valide si on suppose simplement l'existence de variables aléatoires $s_{\vec{u}}^{(1)}(\omega)$, $s_{\vec{u}'}^{(1)}(\omega)$, $s_{\vec{v}}^{(2)}(\omega)$, $s_{\vec{v}'}^{(2)}(\omega)$ mesurables pour chaque « événement ω » sans rentrer plus dans le détail, i.e. si on suppose l'existence « objective » de grandeurs simultanées normalement interdites par la MQ.

♦ Mais le calcul quantique donne $|S_Q| = \frac{\hbar^2}{4} \times 2\sqrt{2}$ et donc « viole » l'inégalité précédente d'un facteur « $\sqrt{2}$ »!!!!

♦ C'est ce type de violation qui a été testée sur des photons (pas des électrons), dans une expérience devenue célèbre par A. Aspect (1980-82).

Théorème de Kochen et Specker (1967): Ce théorème démontre que toute théorie à variables cachées rendant compte des prédictions de la MQ est contextualiste, i.e. les valeurs mesurées des observables dépendent nécessairement du contexte expérimental, et non des entités physiques seules. Ce théorème porte un autre coup à la vision réaliste d'Einstein, qui supposait que chaque entité physique a une existence objective, indépendante de son environnement et de l'observation (source wikipédia).

L'intrication en quelques articles

Article fondateur du « paradoxe EPR »: [Albert Einstein](#), [Boris Podolsky](#) et [Nathan Rosen](#), « Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? », *Phys. Rev.*, vol. 47, **1935**, p. 777-780

Quelques expériences

- ❖ **1980-1982:** Alain Aspect et al. (Institut d'optique): preuve de la « violation des inégalités de Bell » avec des photons (A. Aspect, P. Grangier et G. Roger, « **Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem** », *Phys. Rev. Lett.* 47, 460-463 (1981))
- ❖ **2012-2013:** « Non-localité » due à l'intrication non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps (E. Megidish et al., « **Entanglement Between Photons that have Never Coexisted** », [arXiv:1209.4191](#), *Phys. Rev. Lett.* 110, 210403 (2013))
- ❖ **2015:** Intrication entre deux électrons séparés de 1 300 mètres (B. Hensen et al., « **Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres** », *Nature*, vol. 526, n° 7575, octobre 2015, p. 682–686)
- ❖ **2017:** Intrication macroscopique ([P. Zarkeshian](#) et al., « **Entanglement between more than two hundred macroscopic atomic ensembles in a solid** », [arXiv:1703.04709](#), *Nature Communications* 8, 906 (2017))
- ❖ **2017:** Photons intriqués envoyés depuis un satellite (orbite à 500km) vers des stations terrestres séparées de 1200 km (Juan Yin *et al.* université des sciences et des technologies de [Hefei](#), en Chine)