27 mars 2025

CORRECTION PARTIEL MQ2 MARS 2025

---

1. Exercice 1 Quantum dense coding

(a) Pour chaque mesure sur un photon on ne peut obtenir que le résultat “H” ou “V” de manière exclusive (la base étant fixée), soit 2 résultats possibles. Donc sur n photons Alice peut coder 2^n messages “décodables” par Bob, mais Alice est libre du choix de la base de codage, i.e. deux directions perpendiculaires, (à condition que Bob la connaisse : c'est la clé de codage).

Le nombre de messages codés est le même que dans le cas classique, mais maintenant il faut connaitre la clé de codage (la base) pour pouvoir décoder correctement les messages. Si Bob ne connait pas la base de décodage, les messages obtenus seront des “mots” aléatoires à cause des probabilités quantiques.

(b) On a

$$(\hat{\sigma}_z)_1 \,|\,\Psi^-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hat{\sigma}_z|\,H\,\rangle)\otimes|\,V\,\rangle - (\hat{\sigma}_z|\,V\,\rangle)\otimes|\,H\,\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,HV\,\rangle + |\,VH\,\rangle\right) = |\,\Psi^+\,\rangle\,.$$

(c) De même

$$(\hat{\sigma}_x)_1 \,|\,\Psi^-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hat{\sigma}_x|\,H\,\rangle)\otimes|\,V\,\rangle - (\hat{\sigma}_x|\,V\,\rangle)\otimes|\,H\,\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,VV\,\rangle - |\,HH\,\rangle\right) = -|\,\Phi^-\,\rangle\,.$$

(d) Et enfin

$$(\hat{\sigma}_y)_1 \,|\,\Psi^-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hat{\sigma}_y|\,H\,\rangle)\otimes|\,V\,\rangle - (\hat{\sigma}_y|\,V\,\rangle)\otimes|\,H\,\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\,|\,VV\,\rangle + i|\,HH\,\rangle\right) = i\,|\,\Phi^+\,\rangle\,.$$

(e) Les opérateurs $(\hat{\sigma}_z)_1$, $(\hat{\sigma}_x)_1$, $(\hat{\sigma}_y)_1$ sont des opérateurs unitaires agissant uniquement sur le photon 1, donc Alice peut modifier l'état de la paire de photons en appliquant une de ces transformations unitaires sur le photon qu'elle reçoit (action locale). Elle peut aussi ne rien modifier ce qui correspond à l'identité et en laissant l'état $|\,\Psi^-\,\rangle$.
Avec son choix d'action Alice peut créer un des 4 états de Bell qui correspondront par convention aux 4 double-bits classiques 00, 10, 01 et 11.

(f) Etant donné que les 4 états de Bell constituent une base orthonormée de l'espace de Hilbert de la paire de photons, Bob doit utiliser cette base comme base de mesure pour pouvoir détecter avec certitude les paires qu'Alice aura préparé.

2. Niveaux d'énergie d'une molécule diatomique

(a) Le minimum du potentiel global $V_{eff}(x) = V(x) + \dfrac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu x^2}$ est atteint en x_1 tel que

$$V'_{eff}(x_1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V'(x_1) = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{\mu x_1^3}\,,$$

Cette valeur x_1 correspond d'autant mieux au minimum de $V(x)$, i.e. x_0 tel que $V'(x_0) = 0$, que $\dfrac{\hbar^2 J(J+1)}{\mu x_0^3}$ est *petit*, donc que x_0 est grand. Donc sur la figure 1 le potentiel du **cas (2)** sera mieux approximé par l'expression proposée.

(b) On sait que les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique sont de la forme $E_v = (v+1/2)\hbar\omega$ où $v \in \mathbb{N}$ si le potentiel est de la forme $V(x) = \dfrac{1}{2}\mu\omega^2(x-x_0)^2$. Par identification ici on a $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(x_0)}{\mu}}$ et donc

$$E_{v,J} = V(x_0) + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu x_0^2} + (v+1/2)\hbar\sqrt{\frac{V''(x_0)}{\mu}}\,,$$

donc $E_{v,J} = E_0 + Av + BJ(J+1)$ avec

$$E_0 = V(x_0) + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{V''(x_0)}{\mu}}; \quad A = \hbar\sqrt{\frac{V''(x_0)}{\mu}}; \quad B = \frac{\hbar^2}{2\mu x_0^2}\,.$$

(c) L'incertitude de position $(\Delta x)_v$ dans l'état v de l'oscillateur harmonique est $(\Delta x)_v^2 = \dfrac{\hbar}{\mu\omega}(v+1/2)$, tandis que la position moyenne pour un potentiel centré en x_0 est $< \hat{x} >_v = x_0$. Donc si $(\Delta x)_v \ll x_0$ et x_0 *suffisamment grand* on peut considérer que la fonction d'onde est négligeable dans la région non-physique $x < 0$ et donc l'approximation qui consiste à étendre le domaine de variation de x à $(-\infty, +\infty)$ est légitime.
En tenant compte de l'expression de ω on obtient donc la contrainte

$$(\Delta x)_v^2 \ll x_0^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu V''(x_0)}}(v+1/2) \ll x_0^2\,.$$

Si l'on suppose le nombre v "*non excessivement grand*" cela se réduit à la condition qualitative

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu V''(x_0)}} \ll x_0^2\,.$$

(d) D'après l'expression des fonctions d'onde de l'équation (4) la dégénérescence d'un niveau $E_{v,J}$ est $2J+1$ correspondant aux valeurs de $M \in \{-J, ..., J\}$.

(e) Si l'on exprime le rapport B/A et que l'on tient compte de l'inégalité précédente de la question (c) on obtient

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2x_0^2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu V''(x_0)}} \ll 1\,.$$

On en déduit que dans l'expression de l'énergie $E_{v,J}$ une variation de J induit une beaucoup plus petite variation d'énergie que celle induite par une variation de v, ou dit autrement $E_{v,J+1} - E_{v,J} \ll E_{v+1,J} - E_{v,J}$. Cela conduit au schéma suivant des niveaux d'énergie.

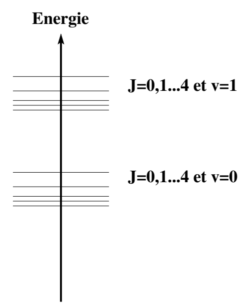

Figure 1. Représentation schématique des niveaux d'énergie $E_{v,J}$.

(f) L'opérateur $\hat{x}$ s'écrit en termes des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sous la forme

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

donc :

$$\hat{x}|\, v\,\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}(\sqrt{v}|\, v-1\,\rangle + \sqrt{v+1}|\, v+1\,\rangle)\,,$$

Donc les transitions $v \to v \pm 2$ sont impossibles et

$$\mu_{v\to v} = 0, \quad \mu_{v\to v+1} = \mu'(x_0)\sqrt{\frac{\hbar(v+1)}{2\mu\omega}}; \quad \mu_{v\to v-1} = \mu'(x_0)\sqrt{\frac{\hbar v}{2\mu\omega}}\,,$$

avec $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(x_0)}{\mu}}$.

(g) Si l'on suppose J fixé, seules les transitions $E_{v,J} \to E_{v\pm1,J}$ sont possibles donc $\Delta E = A$ quelle que soit la valeur de v.

(h) Pour des raisons de parité d'une part de l'opérateur dipolaire, et d'autre part des harmoniques sphériques, une transition $J \to J'$ n'est possible que si $J + J'$ est impair. C'est le cas si $J' = J \pm 1$.

(i) On a les différence d'énergie $\Delta E^P(J)$ et $\Delta E^R(J)$ qui sont données par

$$\Delta E^P(J) = E_{v=1,J+1} - E_{v=0,J} = E_0 + A + B(J+1)(J+2) - (E_0 + BJ(J+1))$$

D'où

$$\Delta E^P(J) = A + 2B(J+1) = h\,\nu^P(J)\,.$$

De même

$$\Delta E^R(J) = E_{v=1,J-1} - E_{v=0,J} = E_0 + A + BJ(J-1) - (E_0 + BJ(J+1))$$

D'où

$$\Delta E^R(J) = A - 2BJ = h\nu^R(J)\,.$$

(j) D'après les formules précédentes on a un spectre de raies équidistantes de $2B/h$ pour $\nu < A/h$, puis une absence de raies entre A/h et $(A+2B)/h$, puis de nouveau un spectre de raies équidistantes de $2B/h$ pour $\nu > (A+2B)/h$: c'est exactement la figure 2.

(k) La masse d'un proton est $m_P = 1$ a.m.u., donc la masse réduite est $\mu = \dfrac{35}{36}$ a.m.u. $= 1.61 \times 10^{-27}$ Kg. Par ailleurs $B = 20.8$ cm$^{-1} = 2.58 \times 10^{-3}$ eV $= 4.12 \times 10^{-22}$ J.

On a $x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2\mu B}}$ d'où

$$x_0 = 0.91(5)\ \text{Å}$$

(l) D'après les questions précédentes on a $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(x_0)}{\mu}}$ et d'après l' expression de A et B (question (b)), on trouve

$$\frac{(\Delta x)_0^2}{x_0^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{\mu V''(x_0)}}\frac{2\mu B}{\hbar^2} = 2\,\frac{B}{A} = 2\,\frac{20.8}{2907} = 1.43 \times 10^{-2}\,,$$

d'où

$$\frac{(\Delta x)_0}{x_0} \simeq 0.12\,.$$

Remarque La question (c) montre que le modèle de l'exercice est valable si $\dfrac{(\Delta x)_0}{x_0} \ll 1$ donc on se trouve ici à la limite du modèle.

3. Absorption à 2 photons

(a) En remplaçant dans l'équation (23) p par $p = 0$ on a

$$\frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n c_n^{(0)}(t) V_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}\,,$$

comme on sait que $c_n^{(0)}(t) = 1$ si $n = g$ et $c_n^{(0)}(t) = 0$ si $n \neq g$ on trouve

$$\frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} V_{mg}(t) e^{i\omega_{mg}t} = \frac{1}{i\hbar}\,d_{mg}\,\mathcal{E}\cos\omega t\, e^{i\omega_{mg}t}\,.$$

(b) L'élément de matrice d_{mg} se calcule par l'intégrale

$$d_{mg} = e \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \, x \, \phi_m(x,y,z)^* \, \phi_g(x,y,z) \,.$$

(c) En écrivant le $\cos\omega t$ en exponentielles complexes on trouve

$$\frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = \frac{1}{2i\hbar} \, d_{mg} \, \mathcal{E} \left(e^{i(\omega_{mg}-\omega)t} + e^{i(\omega_{mg}+\omega)t} \right) .$$

On moyenne sur les oscillations rapides et on ne garde que les oscillations plus lentes, donc si on suppose $|\omega_{mg}+\omega| \gg |\omega_{mg}-\omega|$ on va négliger le terme en $e^{i(\omega_{mg}+\omega)t}$ et on trouve

$$\frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} \simeq \frac{1}{2i\hbar} \, d_{mg} \, \mathcal{E} e^{i(\omega_{mg}-\omega)t} \,.$$

Sachant qu'à l'instant initial on part de l'état fondamental, on a $c_m(0) = 0$ (pour $m \neq g$) et donc à tous les ordres $c_m^{(p)}(0) = 0$ d'où

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{2i\hbar} \, d_{mg} \, \mathcal{E} \int_0^t e^{i(\omega_{mg}-\omega)\tau} \, d\tau = \frac{d_{mg}\mathcal{E}}{2\hbar} \, \frac{1 - e^{i(\omega_{mg}-\omega)t}}{\omega_{mg}-\omega} \,.$$

(d) En utilisant l'équation (26) et le résultat précédent on trouve d'abord

$$\frac{dc_n^{(2)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \, \frac{\mathcal{E}^2}{2\hbar} \sum_m \frac{d_{mg} \, d_{nm}}{\omega_{mg}-\omega} \, \left(1 - e^{i(\omega_{mg}-\omega)t} \right) \, \cos\omega t \, e^{i\omega_{nm}t} \,,$$

(e) En développant le $\cos\omega t$ on obtient

$$\frac{dc_n^{(2)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \, \frac{\mathcal{E}^2}{4\hbar} \sum_m \frac{d_{mg} \, d_{nm}}{\omega_{mg}-\omega} \, \left(1 - e^{i(\omega_{mg}-\omega)t} \right) \left(e^{i(\omega_{nm}+\omega)t} + e^{i(\omega_{nm}-\omega)t} \right) \,,$$

Et par ailleurs

$$\left(1 - e^{i(\omega_{mg}-\omega)t} \right) \left(e^{i(\omega_{nm}+\omega)t} + e^{i(\omega_{nm}-\omega)t} \right) = \\ e^{i(\omega_{nm}+\omega)t} + e^{i(\omega_{nm}-\omega)t} - e^{i(\omega_{mg}+\omega_{nm})t} - e^{i(\omega_{mg}+\omega_{nm}-2\omega)t} \,.$$

Par ailleurs $\omega_{mg} + \omega_{nm} = \omega_{ng}$, donc si l'on suppose que le terme prépondérant est donné par $e^{i(\omega_{ng}-2\omega)t}$ on trouve

$$\frac{dc_n^{(2)}(t)}{dt} = -\frac{\mathcal{E}^2}{4i\hbar^2} \left(\sum_m \frac{d_{mg} \, d_{nm}}{\omega_{mg}-\omega} \right) \, e^{i(\omega_{ng}-2\omega)t} \,.$$

(f) Sachant que $c_n^{(2)}(0) = 0$ on trouve par intégration

$$c_n^{(2)}(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{4\hbar^2} \left(\sum_m \frac{d_{mg} \, d_{nm}}{\omega_{mg}-\omega} \right) \frac{e^{i(\omega_{ng}-2\omega)t} - 1}{\omega_{ng}-2\omega}$$

(g) La probabilité $\mathcal{P}_n(t)$ que l'atome se trouve dans l'état ϕ_n à l'instant t est donnée par $\mathcal{P}_n(t) = |c_n(t)|^2$ et à l'ordre 2 on a

$$c_n(t) \simeq c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t)$$

Or $c_n^{(0)}(t) = 0$, $c_n^{(1)}$ est donné par la question (c) et $c_n^{(2)}(t)$ par la question (f) d'où

$$c_n(t) \simeq \frac{d_{ng}\mathcal{E}}{2\hbar}\,\frac{1-e^{i(\omega_{ng}-\omega)t}}{\omega_{ng}-\omega} + \frac{\mathcal{E}^2}{4\hbar^2}\left(\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}}{\omega_{mg}-\omega}\right)\frac{e^{i(\omega_{ng}-2\omega)t}-1}{\omega_{ng}-2\omega}\,.$$

La probabilité $\mathcal{P}_n^{(2)}(t)$ que la transition se fasse par une absorption à deux photons est donnée par la contribution résonnante pour $\omega_{ng} = 2\omega$, c'est-à-dire que seul $c_n^{(2)}(t)$ contribue à $\mathcal{P}_n^{(2)}(t)$ donc

$$\mathcal{P}_n^{(2)}(t) = |c_n^{(2)}(t)|^2 = \frac{1}{4}\left|\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}\,\mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg}-\omega)}\right|^2 \frac{\sin^2(\omega_{ng}-2\omega)t/2)}{(\omega_{ng}-2\omega)^2}$$

Questions bonus

(h) Si l'on a une densité d'états $\rho(\omega_{np})$ et que l'on suppose les d_{nm} constants alors l'expression précédente devient

$$\mathcal{P}_n^{(2)}(t) = \frac{1}{4}\left|\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}\,\mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg}-\omega)}\right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\rho(\omega')\frac{\sin^2(\omega'-2\omega)t/2)}{(\omega'-2\omega)^2}$$

Si on effectue le changement de variable $x = (\omega' - 2\omega)t/2$ dans l'intégrale on obtient

$$\mathcal{P}_n^{(2)}(t) = \frac{1}{4}\left|\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}\,\mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg}-\omega)}\right|^2 \frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\rho(2\omega+2x/t)\frac{\sin^2 x}{x^2}\,,$$

Si l'on suppose $t \to \infty$ alors $\rho(2\omega + 2x/t) \simeq \rho(2\omega)$ et on obtient

$$\mathcal{P}_n^{(2)}(t) = \frac{1}{8}\left|\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}\,\mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg}-\omega)}\right|^2 \times t \times \rho(2\omega) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\sin^2 x}{x^2}\,.$$

(i) Le taux de transition R_2 est juste donné par $R_2 = \dfrac{d\mathcal{P}_n^{(2)}(t)}{dt}$, soit (en oubliant le facteur $\pi/8$)

$$R_2 = \left|\sum_m \frac{d_{mg}\,d_{nm}\,\mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg}-\omega)}\right|^2 \times \rho(2\omega)$$

et son homogénéité (par construction) est l'inverse d'un temps.

(j) Si l'on admet l'expression de Π_{phot} alors

$$\sigma_2 = \frac{R_2}{\Pi_{phot}^2} = \frac{4\hbar^2\omega^2}{\epsilon_0^2 c^2 \mathcal{E}^4} \left| \sum_m \frac{d_{mg}\, d_{nm}\, \mathcal{E}^2}{\hbar^2(\omega_{mg} - \omega)} \right|^2 \times \rho(2\omega)$$

soit

$$\sigma_2 = \frac{4}{\hbar^2 \epsilon_0^2 c^2} \left| \sum_m \frac{d_{mg}\, d_{nm}\, \omega}{\omega_{mg} - \omega} \right|^2 \times \rho(2\omega)$$

(k) Ordre de grandeur de σ_2

$$\sigma_2 \approx \left(\frac{16\pi \times 9 \times 10^9}{10^{-34} \times 3 \times 10^8} \right)^2 \times \left(10^{-29}\right)^4 \times \frac{1}{4\pi^2} \times 10^{-13} \text{ m}^4.\text{ s}\,,$$

soit

$$\sigma_2 \approx 2 \times 10^{74} \times 10^{-116} \times 2.5 \times 10^{-15} \text{ m}^4.\text{ s} \approx 4.5 \times 10^{-57} \text{ m}^4.\text{ s} \approx 4 \times 10^{-49} \text{ cm}^4.\text{ s}$$

(l) Si l'on veut augmenter significativement σ_2 le plus "payant" est d'essayer d'agir sur les éléments de matrice $d_{nn'}$ car $\sigma_2 \propto d_{nn'}^4$. Donc si on arrive à augmenter d'un facteur 10 les $d_{nn'}$ on multiplie σ_2 par 10^4. Comme les $d_{nn'}$ correspondent à un moment dipolaire, donc à une charge $\times$ une longueur, il semble raisonnable d'essayer de jouer sur la longueur. L'ordre de grandeur $d_{nn'} \approx 10^{-29}$ C . m est basé sur l'atome donc sur une longueur typique de l'ordre de $\ell = 1$Å. Par contre si l'on considère une molécule complexe comme celle proposée l'unité de longueur utile est certainement de l'ordre de $\ell > 1$ nm, s'il y a des orbitales moléculaires "assez délocalisées". Donc il est possible que cette molécule possède les propriétés nécessaires en termes d'orbitales électroniques pour que les éléments de matrice $d_{nn'}$ soient effectivement 10 fois plus grand que dans le cas atomique, donnant un σ_2 "géant" en comparaison du σ_2 atomique.

(m) Le taux de transition à 1 photon est $R_1 = \sigma_1 \Pi_{phot}$ tandis que le taux de transition à 2 photons est $R_2 = \sigma_2 \Pi_{phot}^2$. Donc dans la première expérience (a) le flux de photons est suffisant pour induire un taux de transitions observable à 1 photon dans tout le domaine de pénétration du pulse laser. Par contre dans le cas (b) seul le domaine où le pulse laser est focalisé contient un flux de photons suffisant pour rendre observable les transitions à 2 photons.