Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Examen : 17/12/2024

Durée 2 heures.
Soigner la rédaction et la présentation.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs, montres connectées, sont interdits. Les téléphones portables, éteints et rangés.

Exercice 1. (5points) Pour $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, on pose $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Démontrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors pour tout $R > 0$, les intégrales $I(R) = \displaystyle\int_{D_R} f\, d\lambda$ existent et admettent une limite lorsque $R \to +\infty$ (On peut utiliser le rappel de cours).

   Solution: Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors elle est intégrable sur toute partie mesurable. Or D_R est fermée donc mesurable donc f est intégrable sur D_R. Soit $(R_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui tend vers $+\infty$ et $f_n = f 1_{D_{R_n}}$. Alors $f_n \to f$ simplement et $|f_n| \leq |f|$ pour tout n. Donc par le théorème de convergence dominée, $\int_{D_{R_n}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f_n\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda$. Donc par le rappel de cours, $I(R) \to \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda$.

2. a) Calculer explicitement $\displaystyle\int_{D_R} \sin(x^2+y^2)\, d\lambda(x, y)$ (en justifiant pourquoi cette intégrale existe) en utilisant les coordonnées polaires.

   Solution: La fonction $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est continue donc mesurable. Elle est aussi bornée par 1. On peut appliquer le changement en polaires:
$$\int_{D_R} |\sin(x^2 + y^2)|\, d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{]0,R]} |\sin r^2| r\, dr \leq 2\pi \int_{]0,R]} R\, d\lambda(r) < \infty.$$
   Donc l'intégrale existe. En refaisant le calcul sans les valeurs absolues
$$\int_{D_R} \sin(x^2 + y^2)\, d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{[0,R]} (\sin(r^2)) r\, d\lambda(r) \leq 2\pi \Big[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\Big]_0^R = \pi(1 - \cos(R^2)).$$
   On a utilisé que $r \mapsto -\frac{1}{2}\cos(r^2)$ est une primitive de $r \mapsto (\sin(r^2))r$ et le théorème fondamental de l'analyse.

   b) En déduire que $S : (x, y) \to \sin(x^2 + y^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (Indication: trouver deux suites $(R_n)_{n\geq 0}$ qui vont contredire la question 1).

   Solution: Pour $R_n = \sqrt{2n\pi}$, on a $\cos(R_n^2) = 1$ pour tout n et pour $R'_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$, on, a $\cos({R'_n}^2) = -1$. Les deux suites tendent vers $+\infty$ mais la première donne une limite 0 à $\int_{D_{R_n}} \sin(x^2 + y^2)\, d\lambda(x, y)$ alors que la deuxième donne une limite 2π à $\int_{D_{R'_n}} \sin(x^2 + y^2)\, d\lambda(x, y)$. Elles sont différentes, donc cela montre que $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ ne peut être intégrable.

3. On se donne $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $G(x, y) = g(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on admet que G est mesurable). Démontrer que G est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si ,et seulement si, g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   Solution: On refait le calcul en polaires
$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(x^2 + y^2)|\, d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{]0,+\infty[} |g(r^2)| r\, d\lambda(r) = \pi \int_{]0,+\infty[} |g(s)|\, d\lambda(s).$$
   La dernière égalité utilise le changement de variable $\varphi : r \mapsto r^2 = s$, difféomorphisme de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ avec $\varphi'(r) = 2r$. Cela montre le résultat (puisque être intégrable sur $]0, +\infty[$ ou sur $[0, +\infty[$ est la même chose car $\{0\}$ est de négligeable.)

Problème. Les questions 1 (3pts), 2 (3pts), 3 (5,5pts) et 4 (1,5 pts+ 2pts) peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Les questions 4b),c) sont hors barême.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, x > 0$,

$$L(f)(x) = \int_{[0,+\infty[} f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

a) Soit $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^k f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution: Il existe $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. Donc $|t^k f(t)e^{-at}| \leq Mt^k e^{-at}$ et $t \mapsto t^k e^{-at}$ est une fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$ car $a > 0$. Elle est aussi continue et bornée sur le segment $[0, 1]$ donc y est intégrable. Cela montre l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $L(f)$ est une fonction (bien définie) de classe C^k sur $]a, +\infty[$ et que pour tout $x > a$,

$$L(f)^{(k)}(x) = \int_{[0,+\infty[} (-t)^k f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t),$$

Solution: Posons $g_k(x, t) = (-t)^k f(t)e^{-xt}$.

Remarquons que $e^{-xt} \leq e^{-at}$ si $t \geq 0$ et $x > a$ par la croissance de l'exponentielle.

Pour $k = 0$: Pour $t \geq 0$ et $x > a$, on a que $|g_0(x, t)| \leq |g_0(a, t)|$, $t \mapsto g_0(a, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par 1a) et indépendente de x. De plus, $x \mapsto g_0(x, t)$ est continue sur $]a, +\infty[$ pour tout $t \geq 0$. Donc par le théorème de continuité, $L(f)$ existe en tout p oint de $]a, +\infty[$ et est continue sur $]a, +\infty[$.

Supposons le résultat vrai pour k: On a que $x \mapsto g_k(x, t)$ est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ pour t fixé et sa dérivée est $g_{k+1}(x, t)$. Comme $|g_{k+1}(x, t)| \leq |g_{k+1}(a, t)|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendente de x, on conclut par le résultat du cours que $L(f)^{(k)}$ est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ et donc $L(f)^{(k+1)}(x) = (L(f)^{(k)})'(x) = \int_{[0,+\infty[}(-t)^{k+1} f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t)$.

2. On suppose $f_1(t) = (1 + t^2)^{-1}, t \geq 0$, et on pose $F_1 = L(f_1)$.

a) Démontrer (en utilisant la question 1) que F_1 vérifie l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Solution: D'après le 1), pour tout $x > a$, on a $F_1''(x) = \int_{[0,+\infty[} t^2 f_1(t)e^{-xt}\, d\lambda(t)$ donc par linéarité de l'intégrale,

$$F_1''(x) + F_1(x) = \int_{[0,+\infty[} (t^2 + 1)f_1(t)e^{-xt}\, d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} e^{-xt}\, d\lambda(t) = \lim_{T\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}e^{-xt} \Big]_0^T = \frac{1}{x}.$$

Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, l'équation est vérifiée en tout $x > 0$.

b) Démontrer que $F_1(x)$ admet des limites en 0 et $+\infty$, respectivement $\dfrac{\pi}{2}$ et 0 (Indication: utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).

Solution: Si $x_n \to 0$, on a que $f_1(t)e^{-x_n t} \to f_1(t)$ pour tout t et $|f_1(t)e^{-x_n t}| \leq |f_1(t)|$. Comme la fonction f_1 est intégrable sur $[0, +\infty[$ (elle est continue et $|f_1(t)| \leq t^{-2}$ sur $[1, +\infty[$, fonction de référence). Par convergence dominée,

$$F_1(x_n) \to \int_{[0,+\infty[} f_1(t)\, d\lambda(t) = \lim_{T\to+\infty} \Big[\arctan t \Big]_0^T = \frac{\pi}{2}.$$

Par le rappel cela montre que la limite en 0 existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Si $x_n \to +\infty$, on a cette fois $f_1(t)e^{-x_n t} \to 0$ pour tout t et par le même argument, $F_1(x_n) \to 0$ et on a donc la limite 0 en $+\infty$.

3. On pose $F_2(x) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\, d\lambda(t)$ pour $x \geq 0$.

a) Démontrer que $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On appelle I son intégrale.

Solution: La fonction $f_2 : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a $|f_2(t)| \leq 2t^{-2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. En 0, en utilisant le développement limité $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2)$, on a que f_2 admet comme limite $\frac{1}{2}$. Donc f_2 est intégrable sur $[0,1]$ par un résultat du cours.

b) Démontrer que $F_2(x)$ est bien définie pour $x > 0$, et que $F_2(x) \to I$ lorsque $x \to 0$ et $F_2(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ (On peut à nouveau utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).

Solution: On peut utiliser la caractérisation séquentielle ou bien le théorème de continuité sous l'intégrale en $x = 0$. Car la fonction $x \to \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue en $x = 0$ pour tout $t > 0$ et vaut $f_2(t)$ en $x = 0$. On a aussi $|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}| \leq |f_2(t)|$ pour tout $x > 0$. Donc on a continuitié sous l'intégrale et F_2 est continue en 0 avec $F_2(0) = I$.

Pour $x \to +\infty$, avec une suite $x_n \to +\infty$, on applique le théorème de convergence dominée et $\frac{1-\cos t}{(t+x_n)^2} \to 0$ pour tout $t > 0$ et donc $F_2(x_n) \to 0$. Par le rappel, $F_2(x) \to 0$.

c) On admet que F_2 est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $F_2''(x) = 6 \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{(t+x)^4}\, d\lambda(t)$ pour tout $x > 0$. À l'aide d'intégrations par parties (qu'on justifiera correctement) établir que F_2 vérifie la méme équation differentielle que F_1 de la question 2.

Solution: On intègre par parties sur $[0,T]$ où on peut utiliser l'intégrale de Riemann (fonctions continues)

$$6\int_0^T \frac{1-\cos t}{(t+x)^4}\, dt = \left[-2\frac{1-\cos t}{(t+x)^3}\right]_0^T - 2\int_0^T \frac{-\sin t}{(t+x)^3}\, dt = -2\frac{1-\cos T}{(T+x)^3} - \left[\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^T + \int_0^T \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt.$$

Donc, en utilsant $1 - \cos 0 = 0$ et $\sin 0 = 0$, il vient

$$\begin{aligned} 6\int_0^T \frac{1-\cos t}{(t+x)^4}\, dt + \int_0^T \frac{\cos t}{(t+x)^2}\, dt &= -2\frac{1-\cos T}{(T+x)^3} - \frac{\sin T}{(T+x)^2} + \int_0^T \frac{1}{(t+x)^2}\, dt \\ &= -2\frac{1-\cos T}{(T+x)^3} - \frac{\sin T}{(T+x)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{T+x}. \end{aligned}$$

Si $T \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $F_2''(x) + F_2(x)$ (on repasse à l'intégrale de Lebesgue et on utilise la convergence dominée pour les fonctions intégrables sur $]0,+\infty[$) et le membre de droite vers $\frac{1}{x}$ car les expressions $1 - \cos T$ et $\sin T$ sont bornées (par 2 et 1) et les dénominateurs tendent vers $+\infty$.

4. On établit que l'integrale généralisée $J = \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t}\, dt$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que $J = I$.

Solution: Il faut intégrer par parties sur $[0,R]$, en observant que $1-\cos t$ est une primitive de $\sin t$:

$$\int_0^R \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^R + \int_0^R \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{1-\cos R}{R} + \int_0^R \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt.$$

On a $\frac{1-\cos R}{R} \to 0$ si $R \to +\infty$ (cf le développement limité de 4a) et la dernière intégrale vaut $\int_{]0,R]} \frac{1-\cos t}{t^2}\, d\lambda(t)$ qui converge vers J si $R \to +\infty$ (convergence dominée par caractérisation séquentielle).

b) En utilisant la question 3 c), expliquer pourquoi il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $F_2(x) - F_1(x) = A\sin x + B\cos x$ pour tout $x > 0$.

Solution: La fonction $F_2 - F_1$ est à valeurs réelles et vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2: $y'' + y = 0$. On sait que les solutions sont exactement celles de l'énoncé.

c) Déduire de b) et des limites en $+\infty$ pour F_1 et F_2 que $A = B = 0$.

Solution: Si $x_n = 2n\pi$, on a $x_n \to +\infty$, $(F_2 - F_1)(x_n) \to 0$ et $A \sin x_n + B \cos x_n = B$ pour tout n. Donc $B = 0$. Si $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, on a $A \sin y_n = A$ et $A \sin y_n = (F_2 - F_1)(y_n) \to 0$. Donc $A = 0$.

d) Conclure.

Solution: On a donc montré que $F_2(x) = F_1(x)$ pour tout $x > 0$. On fait tendre $x \to 0$: $F_2(x) \to I$ et $F_1(x) \to \frac{\pi}{2}$. Donc $I = \frac{\pi}{2}$ et comme $J = I$, on a montré $J = \frac{\pi}{2}$.