Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Examen : 17/12/2024

Durée 2 heures.
Soigner la rédaction et la présentation.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs, montres connectées, sont interdits. Les téléphones portables, éteints et rangés.

On peut utiliser sans démonstration ce rappel de cours sur la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $F :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers 0 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x) = \ell$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers $+\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x) = \ell$.

L'intégrabilité (ou non) d'une fonction de référence est supposée connue: elle doit être mentionnée dans les justifications et non redémontrée.

Le barême est indicatif

Question de cours (4points)
Enoncer le théorème de Fubini pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

Exercice 1. (5points) Pour $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, on pose $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq R^2\}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Démontrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors pour tout $R > 0$, les intégrales $I(R) = \displaystyle\int_{D_R} f\,d\lambda$ existent et admettent une limite lorsque $R \to +\infty$ (On peut utiliser le rappel de cours).
2. a) Calculer explicitement $\displaystyle\int_{D_R} \sin(x^2+y^2)\,d\lambda(x,y)$ (en justifiant pourquoi cette intégrale existe) en utilisant les coordonnées polaires.

   b) En déduire que $S : (x,y) \to \sin(x^2+y^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (Indication: trouver deux suites $(R_n)_{n\geq 0}$ qui vont contredire la question 1).
3. On se donne $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $G(x,y) = g(x^2+y^2)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (on admet que G est mesurable). Démontrer que G est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si ,et seulement si, g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Problème. Les questions 1 (3pts), 2 (3pts), 3 (5,5pts) et 4 (1,5 pts+ 2pts) peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Les questions 4b),c) sont hors barême.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, x > 0$,

$$L(f)(x) = \int_{[0,+\infty[} f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

a) Soit $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^k f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $L(f)$ est une fonction (bien définie) de classe C^k sur $]a, +\infty[$ et que pour tout $x > a$,

$$L(f)^{(k)}(x) = \int_{[0,+\infty[} (-t)^k f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t),$$

2. On suppose $f_1(t) = (1 + t^2)^{-1}, t \geq 0$, et on pose $F_1 = L(f_1)$.

a) Démontrer (en utilisant la question 1) que F_1 vérifie l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b) Démontrer que $F_1(x)$ admet des limites en 0 et $+\infty$, respectivement $\dfrac{\pi}{2}$ et 0 (Indication: utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).

3. On pose $F_2(x) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{(t + x)^2}\, d\lambda(t)$ pour $x \geq 0$.

a) Démontrer que $t \mapsto \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On appelle I son intégrale.

b) Démontrer que $F_2(x)$ est bien définie pour $x > 0$, et que $F_2(x) \to I$ lorsque $x \to 0$ et $F_2(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ (On peut à nouveau utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).

c) On admet que F_2 est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $F_2''(x) = 6 \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{(t + x)^4}\, d\lambda(t)$ pour tout $x > 0$. À l'aide d'intégrations par parties (qu'on justifiera correctement) établir que F_2 vérifie la méme équation différentielle que F_1 de la question 2.

4. On établit que l'integrale généralisée $J = \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t}\, dt$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que $J = I$.

b) En utilisant la question 3 c), expliquer pourquoi il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $F_2(x) - F_1(x) = A \sin x + B \cos x$ pour tout $x > 0$.

c) Déduire de b) et des limites en $+\infty$ pour F_1 et F_2 que $A = B = 0$.

d) Conclure.