Examen – Première session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (Contraintes d'inégalités). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y,$$

qu'on étudie sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 2 \quad \& \quad y \leqslant -2x+5\}.$$

1. (a) Définir deux fonctions $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x,y) \leqslant 0 \quad \& \quad h_2(x,y) \leqslant 0\}$.

(b) Les contraintes sont-elles qualifiées en tout point de $\mathcal{D}$?

On cherche maintenant à déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$.

2. (a) Écrire le système KKT correspondant.

(b) Montrer que, *en ne prenant pas en compte de condition de signe sur les multiplicateurs* μ_1 *et* μ_2, le système admet quatre solutions.

3. (a) On pose

$$\mathcal{D}_+ = \{(x,y) \in \mathcal{D} \mid x, y \geqslant 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{D}_+$ est borné.

(b) On considère une suite (x_n, y_n) de $\mathcal{D}$ telle que $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $(x_n, y_n) \notin \mathcal{D}_+$.

(c) En déduire que $f(x_n, y_n) \to -\infty$.

(d) Conclure que f admet un maximum global $\mathcal{D}$ et déterminer sa valeur.

4. Montrer que f n'a pas de minimum global sur $\mathcal{D}$.

5. La fonction f a-t-elle un extremum local sous contraintes au point $(2,1)$?

Exercice 2 (Optimisation linéaire). Une boulangerie industrielle produit du pain, de la brioche et des croissants. Pour cela, elle utilise du beurre, de la farine et de la levure, dont les quantités sont précisées ci-dessous :

	Farine	Beurre	Levure
Pain	2	0	2
Brioche	2	2	3
Croissant	4	6	6

Les quantités de farine, beurre et levure journalières disponibles sont respectivement de 22, 20 et 34 unités. Enfin, les bénéfices journaliers de la vente d'une unité de pain, brioche et croissant sont respectivement de 30, 40 et 40 euros. On cherche à établir un plan de production qui maximise le profit journalier.

1. En supposant que tout ce qui est produit est vendu, justifier que le problème revient à maximiser la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 30x + 40y + 40z$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z & \leqslant & 22 \\ 2y + 6z & \leqslant & 20 \\ 2x + 3y + 6z & \leqslant & 34 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ z & \geqslant & 0 \end{cases}$$

2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points vérifiant les contraintes. Justifier que f a un maximum global sur $\mathcal{D}$.

3. Soit (x, y, z) un sommet de $\mathcal{D}$ dont au plus une des coordonnées est nulle.

(a) On suppose $y = 0$. Montrer qu'alors on a $(x, z) = (13/3, 10/3)$.

(b) On suppose $z = 0$. Montrer qu'alors on a $(x, y) = (1, 10)$.

(c) Peut-on avoir $x = 0$?

4. Énoncer le Théorème de la solution-sommet.

5. On admet que le maximum de f est atteint en un point dont exactement une coordonnée est nulle. Déterminer ce maximum.

6. Déterminer les autres sommets et vérifier qu'ils ne donnent effectivement pas le maximum.

Exercice 3 (Optimisation convexe)**.** On considère les fonctions $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \& \quad h(x, y, z) = x + y^2 + z^2 + 2.$$

1. Montrer que f et h sont des fonctions convexes.

2. On cherche à minimiser f sous la contrainte $h \leqslant 0$.

(a) Montrer que cette contrainte est toujours qualifiée.

(b) Déterminer le ou les points critique(s) sous contrainte.

(c) Conclure.

3. Calculer le problème dual.

4. Énoncer rigoureusement le Théorème de Slater.

5. Résoudre le problème dual.