L3 **2024-2025**
Mathématiques **Institut Villebon-CHARPAK**

Contrôle continu 01

Le mercredi 2 octobre 2024
durée 1h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
Numérotez les copies et questions et soulignez ou $\boxed{\text{encadrez}}$ les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Au niveau rédaction :
- *Faites attention à la validité de vos calculs, vérifiez les autant que possible.*
- *Rédigez entièrement les raisonnements par récurrence (pas de « et ainsi de suite ») justifiant un résultat valable pour un entier quelconque.*

Exercice I

On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner D^3.
2. Donner pour k entier naturel quelconque, une formule pour D^k.
3. Donner D^{-1}, puis, pour k entier naturel quelconque, une formule pour D^{-k}.

Exercice II

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner A^2 et A^3.
2. Donner pour k entier naturel quelconque, une formule pour A^k.
3. Donner A^{-1}, puis, pour k entier naturel quelconque, une formule pour A^{-k}.

Problème III

On considère la matrice à coefficients réels :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

Noyau, image, déterminant

A.1. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$, le noyau de Δ en en donnant une base.
A.2. Que vaut –sans calcul supplémentaire– le déterminant de Δ ?
A.3. Déterminer $\operatorname{Im}\Delta$, l'espace image de Δ en en donnant une (ou un système d') équation(s) cartésienne(s).
A.4. Enoncer le théorème du rang. Quelles sont les dimensions de $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$?
A.5. Que vaut la trace de Δ ?

Partie B
Matrice associée

On pose les quatres vecteurs

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice P, définie colonne par colonne :

$$P = \left(\tfrac{1}{2}C_1 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}C_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_4 \right)$$

B.1. Calculer les dix produits ${C_1}^\top.C_1$, ${C_1}^\top.C_2$, ${C_1}^\top.C_3$, ${C_1}^\top.C_4$, ${C_2}^\top.C_2$, ${C_2}^\top.C_3$, ${C_2}^\top.C_4$, ${C_3}^\top.C_3$, ${C_3}^\top.C_4$ et ${C_4}^\top.C_4$ et en déduire la valeur de $P^\top.P$.
B.2. Montrer que P est inversible et donner son inverse. (pas de gros calculs)
B.3. Justifier que $\mathscr{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
B.4. Calculer $\Delta.C_1$, $\Delta.C_2$, $\Delta.C_3$, $\Delta.C_4$.
B.5. En déduire $\Delta.P$ puis $\Delta' = P^\top.\Delta.P$.
B.6. On exécute le script Python/Numpy suivant

```python
import numpy as np

Delta = np.array([
    [ 2,-1, 0,-1],
    [-1, 2,-1, 0],
    [ 0,-1, 2,-1],
    [-1, 0,-1, 2]
])
I4 = np.eye(4)
M = Delta @ Delta - I4

print("D =", np.linalg.det(M) )
print("T =", np.trace(M) )
```

On obtient les résultats suivants :

```
D =  -134.99999999999991
T = 20.0
```

Justifier la cohérence de ces résultats avec un calcul direct du déterminant et de la trace de $\Delta^2 - I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4. On détaillera chaque opération faite par ce script.

Indication:Ces calculs sont très simples si on remplace Δ par Δ'.

B.7. Calculer l'inverse de $\Delta - I_4$.

L3 **2024-2025**
Mathématiques **Institut Villebon-Charpak**

Correction Contrôle continu 01

Correction Ex.–1 On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On a (pur calcul)

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Donner pour k entier naturel quelconque, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

On le montre par récurrence :

— Pour $k = 0$, $D^k = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$ par définition de la puissance 0 ;

— Supposons que pour un certina entier naturel k, la formule proposée soit correcte alors, on a (les produits matriciels sont faciles car les matrices sont diagonales) :

$$D^{k+1} = D.D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

et donc la formule proposée est correcte pour $k+1$.

3. On a

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

car

$$D. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & (-1).(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2.\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_3$$

Pour k entier naturel quelconque, on a $D^{-k} = (D^{-1})^k$ et la même récurrence que celle faite pour D donne que

$$D^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-k} \end{pmatrix}$$

En conclusion de l'exercice, on voit donc que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, D^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell & 0 \\ 0 & 0 & 2^\ell \end{pmatrix}$$

Correction Ex.–2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On a (calcul direct à montrer)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 32 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

2. On montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

— Initialisation : pour $k = 0$, c'est vrai car $A^k = I_3$;
— On a, pour $k \in \mathbb{N}$ donné

$$\begin{pmatrix} 2^k & 0 & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 & 1.2^k + 2.k.2^{k-1} \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 & (k+1).2^k \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que si, à un certain rang $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 & (k+1).2^k \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Ceci est exactement la propriété d'hérédité recherchée et montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

NB : Pour démontrer la formule précédente, on a « deviné » la forme de A^k en fonction de k d'après un certain nombre d'expériences. On peut procéder directement en remarquant que

$$A = 2I_3 + N$$

où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $N^2 = 0$ et donc $\forall \ell \geq 2, N^\ell = 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, comme $I_3.N = N.I_3$, par le binôme de NEWTON, on a

$$A^k = (2I_3 + N)^k = 2^k I_3 + \binom{k}{1}.2^{k-1} I_3.N + \binom{k}{2}.2^{k-2} I_3.N^2 + \cdots = 2^k I_3 + k.2^{k-1} N = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

3. Qui ne tente rien, n'a rien : posons

$$B = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & -1.2^{-2} \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$$

ceci est le terme de droite pour $k = -1$ dans la formule donnant A^k pour $k \geq 0$.

On vérifie [1] que

$$A.B = I_3$$

et donc $A^{-1} = B$.

Pour k entier naturel quelconque, A^{-k} est l'inverse de A^k. On vérifie en posant

$$B_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 & -k.2^{-k-1} \\ 0 & 2^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-k} \end{pmatrix}$$

que $B_k.A^k = I_3$ et donc

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 & -k.2^{-k-1} \\ 0 & 2^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-k} \end{pmatrix}$$

En conclusion de cet exercice,

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, A^\ell = \begin{pmatrix} 2^\ell & 0 & \ell.2^{\ell-1} \\ 0 & 2^\ell & 0 \\ 0 & 0 & 2^\ell \end{pmatrix}$$

1. Oui ! c'est vrai, faites le ! !

Correction Ex.–3 On considère la matrice à coefficients réels :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

Noyau, image, déterminant

A.1. SOit $X \in \mathbb{R}^4$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On a

$$X \in \operatorname{Ker}\Delta \Leftrightarrow \Delta.X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \\ -x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Par la méthode, du pivot de GAUSS, ce sytème équivaut aux systèmes suivants

$$\underset{\longrightarrow}{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1}} \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ +3y - 2z - t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \\ -y - 2z + 3t = 0 \end{cases} \quad \underset{\longrightarrow}{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2}} \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ +3y - 2z - t = 0 \\ 4z - 4t = 0 \\ -8z + 8t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3} \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ +3y - 2z - t = 0 \\ 4z - 4t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est un système échelonné de rang 3, la matrice Δ est donc de rang 3. Il y a un paramètre à introduire : le vecteur X satisfait ce dernier système (et donc le premier) si et seulement si (on effectue la remontée en une passe)

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \\ t = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, X = \mu. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\operatorname{Ker}\Delta$ quiest de dimension 1.

A.2. La matrice Δ n'est donc pas inversible, son déterminant est nul.

A.3. Pour déterminer $\operatorname{Im}\Delta$ deux méthodes :

— En traitant la question suivante de façon un peu prématurée : $\dim \operatorname{Ker}\Delta = 1$ et $\operatorname{rg}\Delta = 3$. l'espace image de Δ est donc de dimension 3. Par ailleurs, on peut constater que si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}\Delta$, la somme $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ (car ceci est vrai de chacune des colonnes de Δ. Comme l'ensemble des $Y \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ est de dimension 3 (système linéaire à 4 inconnues de rang 1) et contient $\operatorname{Im}\Delta$ qui est de même dimension alors $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ est une équation cartésienne de $\operatorname{Im}\Delta$.

— Méthode basée sur la reprise de la résolution du sytème linéaire permettant de calculer $\operatorname{Ker}\Delta$. Un vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ apprtient à $\operatorname{Im}\Delta$ si et seulement si le système $\Delta.X = Y$ admet au ùmoins une solution. Résolvons partiellement ce système par la méthode du pivot de GAUSS (on reprend les calculs déjà faits mais il y a maintenant un second membre paramètre qui doit suivre la musique) :

$$\underset{L_4 \leftarrow 2L_4+L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2+L_1}{\longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rrrrcrrrr} 2x & -y & & -t & = & y_1 & & & \\ & +3y & -2z & -t & = & y_1 & +2y_2 & & \\ & -y & +2z & -t & = & & & y_3 & \\ & -y & -2z & +3t & = & y_1 & & & +2y_4 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow 3L_4+L_2}{\overset{L_3 \leftarrow 3L_3+L_2}{\longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rrrrcrrrr} 2x & -y & & -t & = & y_1 & & & \\ & +3y & -2z & -t & = & y_1 & +2y_2 & & \\ & & 4z & -4t & = & y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \\ & & -8z & +8t & = & 4y_1 & +2y_2 & & +6y_4 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4+2L_3}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrrcrrrr} 2x & -y & & -t & = & y_1 & & & \\ & +3y & -2z & -t & = & y_1 & +2y_2 & & \\ & & 4z & -4t & = & y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \\ & & & 0 & = & 6y_1 & +6y_2 & +6y_3 & +6y_4 \end{array} \right.$$

Ce système admet (au moins) une solution si et seulement la dernière équation (équation de compatibilité où les inconnues n'interviennent pas) est réalisée. Autrement dit :

$$Y \in \operatorname{Im}\Delta \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

A.4. Le théorème du rang affirmler que pour une matrice quelconque, la somme la dimension de son noyau et de la dimension de son image (son rang) vaut le nombre de colonnes. Ici $\dim \operatorname{Ker}\Delta = 1$ et $\dim \operatorname{Im}\Delta = 3$ et $1+3=4$.

A.5. La trace de Δ est la somme des coeffcients diagonaux, elle vaut 8.

Partie B

Matrice associée

On pose les quatres vecteurs

$$C_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

et la matrice P, définie colonne par colonne :

$$P = \left(\tfrac{1}{2}C_1 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}C_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_4 \right)$$

B.1. On a (calculs très élémentaires !) :

$$C_1{}^\top.C_1 = 4, C_1{}^\top.C_2 = 0, C_1{}^\top.C_3 = 0, C_1{}^\top.C_4 = 0,$$

$$C_2{}^\top.C_2 = 2, C_2{}^\top.C_3 = 0, C_2{}^\top.C_4 = 0,$$

$$C_3{}^\top.C_3 = 4, C_3{}^\top.C_4 = 0 \text{ et } C_4{}^\top.C_4 = 2$$

On en déduit que $P^\top.P = I_4$ car

$$P^\top.P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_1{}^\top \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}C_2{}^\top \\ \hline \frac{1}{2}C_3{}^\top \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}C_4{}^\top \end{pmatrix} . \left(\tfrac{1}{2}C_1 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}C_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}C_4 \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}C_1{}^\top.C_1 & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}C_1{}^\top.C_2 & \frac{1}{4}C_1{}^\top.C_3 & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}C_1{}^\top.C_4 \\ 0 & \frac{1}{2}C_2{}^\top.C_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}C_2{}^\top.C_3 & \frac{1}{2}C_2{}^\top.C_4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}C_3{}^\top.C_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}C_3{}^\top.C_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}C_4{}^\top.C_4 \end{pmatrix}$$

NB : Dans ce calcul les zéros s'obtiennent du fait de la symétrie automatique de $P^\top.P$ car

$$\left(P^\top.P\right)^\top = P^\top.P^{\top^\top} = P^\top.P$$

B.2. On en déduit que P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = P^\top$.

B.3. Comme P est inversible, les colonnes de P forment une base de $\mathbb{R}^4$. On ne change pas ce caractère d'une famille en multipliant chaque vecteur par un scalaire non nul et donc $\mathscr{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

B.4. On a

$$\Delta.C_1 = 0, \Delta.C_2 = 2C_2, \Delta.C_3 = 4C_3, \Delta.C_4 = 2C_4$$

B.5. On peut donc décrire $\Delta.P$ par colonnes :

$$\Delta.P = \left(\tfrac{1}{2}\Delta.C_1 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta.C_2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\Delta.C_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta.C_4 \right) = \left(0 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}2.C_2 \;\middle|\; 2.C_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}2.C_4 \right)$$

puis, par un calcul similaire à celui de $P^\top.P$

$$\Delta' = P^\top.\Delta.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B.6.

On peut noter que en Python/Numpy :

— `I4 = np.eye(4)` compose la matrice I_4,

— `Delta = np.array([[...,],... ])` compose la matrice Δ

— et `M = Delta @ Delta - I4` assigne à M la valeur de $\Delta.\Delta - I_4 = \Delta^2 - I_4$.

— Les fonctions `np.linalg.det` et `np.linalg.trace` calcule respectivement le déterminant et la trace d'une matrice (que l'on imprime à l'écran à l'aide `print(...)` .

Il s'agit donc de calculer à la main le déterminant et la trace de $\Delta^2 - I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.

On a

$$(\Delta')^2 - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}.(\Delta^2 - I_4).P$$

On a

$$\operatorname{Tr}((\Delta')^2 - I_4) = -1 + 3 + 15 + 3 = 20 \text{ et } \det((\Delta')^2 - I_4) = (-1).3.15.3 = -135$$

Par ailleurs, comme en général, pour des matrices carrées, $\operatorname{Tr}(M.N) = \operatorname{Tr}(N.M)$ et $\det(M.N) = \det(N.M)$

$$\operatorname{Tr}((\Delta')^2 - I_4) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(\Delta^2 - I_4).P) = \operatorname{Tr}(\Delta^2 - I_4).P.P^{-1}) = \operatorname{Tr}(\Delta^2 - I_4)$$

et de même, en général, pour des matrices carrées, $\det(M.N) = \det(N.M)$

$$\det((\Delta')^2 - I_4) = \det(\Delta^2 - I_4)$$

On a finalement, comme calculé par la machine

$$\operatorname{Tr}(\Delta^2 - I_4) = 20 \text{ et } \det(\Delta^2 - I_4) = -135$$

B.7. On a

$$\Delta - I_4 = P.\Delta'.P^{-1} - I_4 = P.(\Delta' - I_4).P^{-1}$$

et donc (inverse d'un produit)

$$(\Delta - I_4)^{-1} = P.(\Delta' - I_4)^{-1}.P^{-1}$$

On sait que

$$\Delta' - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (\Delta' - I_4)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et il reste à calculer le produit $P.(\Delta' - I_4)^{-1}.P^{-1} = P.(\Delta' - I_4)^{-1}.P^{\top}$.

On laisse le lecteur intéressé trouver que ça donne :

$$(\Delta - I_4)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$