CC/EF 03

Le mercredi 18 décembre 2024
durée 1h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Au niveau rédaction :
- *Faites attention à la validité de vos calculs, vérifiez les autant que possible.*
- *Rédigez entièrement les raisonnements par récurrence (pas de « et ainsi de suite ») justifiant un résultat valable pour un entier quelconque.*

Exercice I

On cherche à déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence à trois termes désignée par (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n \tag{R}$$

1. On définit ci-dessous la matrice M et, partant d'une suite réelle quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n$$
   (b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n.U_0$$
   (c) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si $\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Déterminer les valeurs propres (on peut factoriser le polynôme précédent par $\lambda - 1$) de la matrice M et vérifier que M est diagonalisable.
   (d) Montrer que en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, la matrice P et inversible et $P^{-1}.M.P$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
   NB : dans cette question, il n'est pas du tout nécessaire d'inverser pratiquement P !
   (e) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de trois suites géométriques à préciser.
   On admettra la réciproque, à savoir que toutes les suites de cette forme vérifient la récurrence (R).
2. Trouver la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence (R) et vérifiant de plus $u_0 = 3$, $u_2 = 1$, $u_3 = 9$.

Exercice II

On considère la matrice M :

$$M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est la matrice de transition d'une chaîne de MARKOV. On dessinera le graphe associé à cette chaîne avec les pondérations (probabilités de passage) sur les arêtes. (Les configurations, c'est à dire les sommets du graphe sont nommées 1, 2, 3 et 4.)
2. Rappeler pourquoi–en toute généralité– le nombre 1 est forcément valeur propre de M.
3. Déterminer l'espace propre de M associé à la valeur propre 1.
4. Donner le rang de M. En déduire l'autre valeur propre de M ainsi que le fait que M est diagonalisable.
5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de MARKOV associée à M. C'est à dire une suite de v.a. à valeurs dans $\{1,2,3,4\}$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 0, \forall i \in \{1,2,3,4\}, \mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{i=1}^{4} m_{ij}.\mathbb{P}(X_n = j).$$

Montrer que quelque soit la loi de X_0, à partir de $n \geq 1$, la loi de la v.a. X_n ne dépend pas de n. On donnera cette loi commune.

Problème III

On s'intéresse dans ce petit problème à l'analyse de la durée de vie des larves d'éphémères. Celles-ci vivent environ trois ans sous l'eau avant de prendre leur forme adulte quelques jours, le temps de se reproduire et de mourir. D'une année k sur la suivante $k+1$ (k pouvant valoir 0, 1 ou 2), la population de larves a un taux de survie s_k, ce qui signifie qu'une proportion s_k de la population passe de l'âge k à l'age $k+1$. A la fin de l'année 2, toutes les larves sont devenues adultes et meurent (ce que l'on considère comme l'age de $k = 3$ ans).

FIGURE 1 – *Rhithrogena germanica*

On peut simuler le comportement individuel d'une larve en disant que celle-ci, à l'année k, à une probabilité s_k de passer à l'année $k+1$ et une probabilité $1 - s_k$ de mourir (et donc de passer directement à l'âge $k = 3$ ans).

Le fait que $s_2 = 1$ s'interprète par le fait qu'à 2 ans, toutes les larves meurent (et donc passent dans l'état 3), ce n'est pas vraiment un taux de surive, plutôt un taux de passage dans l'état final.

Simulation informatique

En début de script, on importe la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np` et on définit une fonction de tirage au sort (peu importe le codage précis de cette fonction) d'une variable de BERNOULLI de paramètre p :

```
def Bernoulli(p) :
    """ Retourne 1 avec proba p, 0 avec proba 1-p """
```

On définit ensuite la fonction `AnneeSuivante(k)` qui pour un invidu de l'année `k` détermine son année suivante `k+1` ou `len(s)` (qui vaut 3) suivant la liste des probabilité de survie `s`, définie juste avant la définition de cette fonction.

```
s = [1/3,1/2,1]
def AnneeSuivante(k):
    #Détermine si l'éphémère, à l'année k, passe à l'année k+1 ou directement en k=3
    if k == len(s) : return k #J'y suis, j'y reste !
    if Bernoulli(s[k]) == 1 :
        return k + 1
    return len(s)
```

1. Expliquer ce que calcule la fonction `TempsSurvie` définie ci-après :

```
def TempsSurvie():
    t = 0
    k = 0
    while True :
        t = t + 1
        k = AnneeSuivante(k)
        if k == len(s) :
            return t
```

2. On exécute le reste du script

```
NS = 10_000
ET = 0
for _ in range(NS) :
    ET += TempsSurvie()
print("Taux de survie",s, "Population", NS)
print("estimation population", ET/NS)
print("valeur théorique", 1+ s[0] + s[0]*s[1])
```

ce qui donne comme résultat

```
Taux de survie [0.3333, 0.5, 1] Population 10000
estimation population 1.5008
valeur théorique 1.5
```

Expliquer ce qui est calculé finalement par la formule `ET/NS`.
D'après ce script, quelle serait la valeur théorique de cette quantité en fonction des taux de survie ?

Etude théorique

Soit s_0, s_1 deux nombres réels de l'intervalle $]0,1[$. On note S la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Puissances et Inversion de la matrice $I_3 - S$.
   (a) Calculer S^2, S^3.
   (b) En déduire que la matrice $I_3 - S$ admet pour inverse $I_3 + S + S^2$

   On considère maintenant la matrice 4×4 définie par blocs :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} S & \mathbf{0} \\ \hline L & 1 \end{array}\right)$$

   où $L = \begin{pmatrix} 1 - s_0 & 1 - s_1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{0}$ indique un emplacement occupé par des zéros.

4. (a) Montrer que P est une matrice de transition de MARKOV. On dessinera le graphe associé, on nomme (dans l'ordre assez naturel du problème) 0, 1, 2 et 3 les configurations de cette chaîne.
   (b) Vérifier que $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .(I_3 - S)$.
   (c) Vérifier que

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} S^2 & \mathbf{0} \\ \hline L.(I_3 + S) & 1 \end{array}\right), P^3 = \left(\begin{array}{c|c} S^3 & \mathbf{0} \\ \hline L.(I_3 + S + S^2) & 1 \end{array}\right)$$

   et simplifier l'expression de P^3 en utilisant les résultats des questions 3 et 4.b.

5. On considère maintenant une chaine de MARKOV associée à cette matrice P, partant de 0, c'est à dire une suite de v.a. à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $X_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 0, \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{i=0}^{3} P_{ij}.\mathbb{P}(X_n = j).$$

   (a) Rappeler pourquoi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = P^n. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \geq 3, \mathbb{P}(X_n = 3) = 1.$$

   (c) Donner les valeurs de

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 3) \text{ et } \mathbb{P}(X_2 \neq 3)..$$

   On pose T, le premier indice tel que $X_T = 3$. On cherche à évaluer l'espérance de T.

6. (a) Pourquoi T est-elle à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$? Justifier la formule

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(T = k)$$

   (b) Démontrer l'identité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(X_k \neq 3)$$

   (c) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T > k - 1) - \mathbb{P}(T > k)$. En déduire le loi de T.
   (d) Donner l'espérance T en fonction de s_0 et s_1 et faire le lien avec la partie simulation.

Correction CC/EF 03

Correction Ex.–1

On cherche à déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence à trois termes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n \tag{R}$$

1. On définit ci-dessous la matrice M et, partant d'une suite réelle quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

(a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -4u_n + 4u_{n+1} + u_{n+2} \end{pmatrix} = M.U_n$$

(Il suffit pour la dernière égalité, d'effectuer le produit matriciel $M.U_n$)

(b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors, par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n$$

Montrons maintenant par récurrence sur n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_n : U_n = M^n.U_0$$

Init. Pour $n = 0$, H_0 se lit $U_0 = M^0.U_0$ sachant que par convention $M^0 = I_3$, cette identité est vraie.

Héréd. Supposons H_n vrai pour un certain entier n. On a donc

$$U_n = M^n.U_0$$

Maintenant, par la question précédente, $U_{n+1} = M.U_n$. On en déduit que

$$U_{n+1} = M.U_n = M.(M^n.U_0) = M^{n+1}.U_0$$

On a donc vérifié que H_{n+1} est vraie.

(c) Un nombre réel λ est valeur propre de M si et seulement si $\det(\lambda.I_3 - M) = 0$, c'est à dire

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Or

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \lambda.(\lambda.(\lambda-1) - 4) + 4 = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

et donc

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(M) \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-4) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2)$$

On a donc $\mathrm{Spec}(M) = \{1, 2, -2\}$. M, de taille 3×3 possède 3 valeurs propres (distinctes !), elle est donc diagonalisable.

(d) On pose (dans la dernière écriture, on définit les colonnes de P)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = (P_1|P_2|P_{-2})$$

On a (calculs non détaillé, à laisser sur la copie)

$$\begin{array}{rcl} M.P_1 & = & P_1 \\ M.P_2 & = & 2.P_2 \\ M.P_{-2} & = & -2.P_{-2} \end{array}$$

On en déduit que $P_1, P_2, P_{-2})$ sont vecteurs propres de M associés respectivmeent aux valeurs propres 1, 2 et -2. On en déduit (valeurs propres distinctes), qu'ils forment une famille libre (et donc une base de $\mathbb{R}^3$, vu qu'ils ont 3 !) et que la matrice P est inversible. On a

$$M.P = (M.P_1|M.P_2|M.P_{-2}) = (P_1|2.P_2|(-2).P_{-2}) = P.D$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et donc $P^{-1}.M.P = D$.

(e) On a $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ et le calcul matriciel

$$U_n = M^n.U_0 = P.D^n.P^{-1}.U_0$$

montre que la première composante de U_n, à savoir u_n est combinaison linéaire (à coefficients bien évidemment indépendants de n) de 1^n, 2^n et $(-2)^n$.

On en déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence (R) alors il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda.1^n + \mu.2^n + \nu.(-2)^n$$

i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites géométriques $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En prenant $\lambda = \mu = \nu = 1$ pour définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via la formule précédente, la suite (u_n) vérifient la récurrence (R) et $u_0 = 3$, $u_2 = 1$, $u_3 = 9$. (Il n'y a qu'une seule telle suite, une suite récurrente d'ordre 3 étant uniquement déterminée par la donnée des trois premiers termes.

Correction Ex.–2

On considère la matrice M :

$$M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Pour que M soit la matrice de transition d'une chaîne de MARKOV. Il suffit de vérifier (et c'est évident, une fois dit que tous ses coefficients sont positifs et que la somme des termes sur chaque colonne vaut 1. On a $(\frac{1}{10}(1+2+3+4) = 1)$.

2. Comme la somme de chaque colonne de M donne 1, cela implique que $M^\top.U = U$ où U est le vecteur ne comportant que des 1. Le vecteur U est donc vecteur propre de $M^\top$ associé à la valeur propre 1. Comme M et $M^\top$ ont même spectre, cela implique que 1 est valeur propre de M.

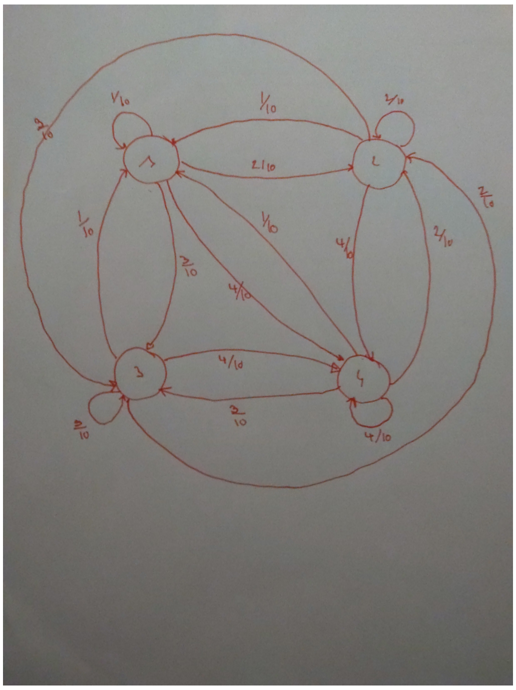

FIGURE 2 – Le graphe associé à la matrice M.

3. On cherche donc les vecteurs X tels que $M.X = X$. Sachant que tous les colonnes de M sont identiques (et valent $V = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$), cela force X à être colinéaire à ce vecteur.

   On a $M.V = V$ (calcul direct) et donc $E_1(M) = \operatorname{Ker} M - I_4 = \operatorname{Vect}\langle V\rangle$.
4. L'espace image de V est $\operatorname{Vect}\langle V\rangle$. Donc le rang de M est 1 et par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} M = 3$. On en déduit que 0 est valeur propre de M de multiplicité géométrique 3. La somme des dimensions des sous-espaces propres associés à 1 et 0 vaut $1+3=4$. Comme M est carrée 4×4, elle est diagonalisable.
5. La loi de X_n est donnée par le vecteur

$$P_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\\ \mathbb{P}(X_n = 3)\\ \mathbb{P}(X_n = 4)\end{pmatrix}$$

   On a (construction standard de la matrice de transition)

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = M.P_n.$$

   Pour $n = 1$, $P_1 = M.P_0$ et donc $P_1 \in \operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}\langle V\rangle$. P_1 est donc colinaire à V et comme la somme de ses composantes vaut 1, $P_1 = V$. Comme $M.V = V$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = V$$

   Donc, à partir de $n \geq 1$, la loi de la v.a. X_n ne dépend pas de n. Elle est donnée par le vecteur V.

Correction Ex.–3

Simulation informatique

1. La fonction `TempsSurvie` siule, pour un invidu, sa durée de vie : en effet, elle boucle (et incrémente la valeur `t` qui sera retournée à la fin) tant que l'individu n'est pas dans l'état final `3=len(s)`.
2. La formule `ET/NS` est la moyenne sur une population de `NS` indivus des durées de survie. Cette valeur moyenne est dans le cas présenté de 1.5008. (Il s'agit d'une expérience aléatoire, les résultats varient d'une fois sur l'autre).

   D'après ce script, la valeur théorique de cette quantité en fonction des taux de survie serait

$$1+s_0+s_0.s_1?$$

Etude théorique

Soit s_0, s_1 deux nombres réels de l'intervalle $]0,1[$. On note S la matrice

$$S=\begin{pmatrix}0&0&0\\ s_0&0&0\\ 0&s_1&0\end{pmatrix}$$

3. Puissances et Inversion de la matrice I_3-S.

   (a) On a (calcul explicite)

$$S^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ s_0.s_1&0&0\end{pmatrix}, S^3=0$$

   (b) On a $(I_3-S).(I_3+S+S^2)=I_3-S^3=I_3$ et donc I_3-S admet pour inverse I_3+S+S^2.

   On considère maintenant la matrice 4×4 définie par blocs :

$$P=\left(\begin{array}{c|c} S & \mathbf{0} \\ \hline L & 1\end{array}\right)$$

   où $L=\begin{pmatrix}1-s_0 & 1-s_1 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{0}$ indique un emplacement occupé par des zéros.

4. (a) Les coefficients de la matrice P sont tous positifs et la somme de chaque colonne vaut 1 : P est une matrice de transition de MARKOV.

   (b) (Calcul) $L=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}.(I_3-S)$.

   (c) Les calculs se font par blocs.

$$P^2=\left(\begin{array}{c|c} S & \mathbf{0} \\ \hline L & 1\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} S & \mathbf{0} \\ \hline L & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} S^2+\mathbf{0}.L & \mathbf{0} \\ \hline L.(S+I_3) & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} S^2 & \mathbf{0} \\ \hline L.(S+I_3) & 1\end{array}\right)$$

   Sur le même modèle,

$$P^3==\left(\begin{array}{c|c} S^2 & \mathbf{0} \\ \hline L.(I_3+S) & 1\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} S & \mathbf{0} \\ \hline L & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} S^3+\mathbf{0}.L & \mathbf{0} \\ \hline L.(S+I_3)S+L & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} S^3 & \mathbf{0} \\ \hline L.(I_3+S+S^2) & 1\end{array}\right)$$

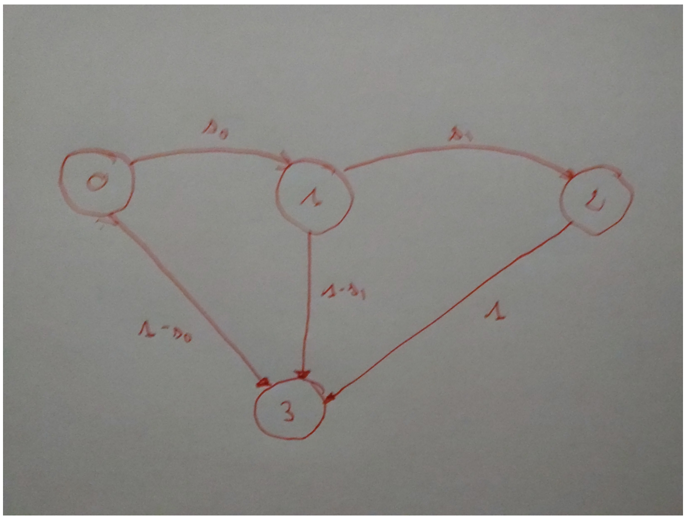

FIGURE 3 – Le graphe associé à la matrice P.

Comme $S^3 = 0$ et $L.(I_3 + S + S^2) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.(I_3 - S).(I_3 + S + S^2) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, il vient

$$P^3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} & 1 \end{array}\right)$$

5. (a) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0)\\ \mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\\ \mathbb{P}(X_n = 3)\end{pmatrix} = P^n . \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

C'est la formule obtenue comme dans le cours à partir de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2)\\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3)\end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0)\\ \mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\\ \mathbb{P}(X_n = 3)\end{pmatrix}$$

(b) Le calcul de P^3 fait précédemment montre que si $n \geq 3$, $P^n = P^3.P^{n-3}$ et ceci vaut P^3. Le vecteur $\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0)\\ \mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\\ \mathbb{P}(X_n = 3)\end{pmatrix}$ est la première colonne de P^n et donc, si $n \geq 3$,

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0)\\ \mathbb{P}(X_n = 1)\\ \mathbb{P}(X_n = 2)\\ \mathbb{P}(X_n = 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 3) = 1.$$

(c) On a en observant la première colonne de $P^1 = P$,

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_1 = 0)\\ \mathbb{P}(X_1 = 1)\\ \mathbb{P}(X_1 = 2)\\ \mathbb{P}(X_1 = 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ s_0\\ 0\\ 1 - s_0\end{pmatrix}$$

et en observant la première colonne de P^2,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_2 = 0) \\ \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \mathbb{P}(X_2 = 2) \\ \mathbb{P}(X_2 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_0.s_1 \\ 1 - s_0.s_1 \end{pmatrix}$$

On a donc les valeurs :

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 3) = s_0, \text{ et } \mathbb{P}(X_2 \neq 3) = s_0.s_1.$$

6. On pose T, le premier indice tel que $X_T = 3$. On cherche à évaluer l'espérance de T.

   (a) La v.a T est à valeurs dans $\{1,2,3\}$ car à l'instant 0, $X_0 = 0 \neq 3$ et, quoiqu'il arive, $X_3 = 3$, le premier indice k tel que $X_k = 3$ est donc entre 1 et 3. La formule

   $$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(T = k)$$

   est la formule habituelle de l'espérance pour une v.a. à valeurs dans $\{1,2,3\}$.

   (b) L'événement $\{T > k\}$ a lieu lorsque le *premier* indice ℓ tel que $X_\ell = 3$ est $> k$, cela équivaut au fait qu'en X_k, on n'est pas encore en 3. c'est à dire qu'on l'égalité d'événements

   $$\{T > k\} = \{X_k \neq 3\}$$

   En passant aux probabilités,

   $$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(X_k \neq 3)$$

   (c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T > k-1) = \mathbb{P}(T \geq k) = \mathbb{P}(T > k) + \mathbb{P}(T = k)$ et donc

   $$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k).$$

   On a donc

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = 1) &= \mathbb{P}(T > 0) - \mathbb{P}(T > 1) = \mathbb{P}(X_0 \neq 3) - \mathbb{P}(X_1 \neq 3) = 1 - s_0 \\ \mathbb{P}(T = 2) &= \mathbb{P}(T > 1) - \mathbb{P}(T > 2) = \mathbb{P}(X_1 \neq 3) - \mathbb{P}(X_2 \neq 3) = s_0 - s_0.s_1 \\ \mathbb{P}(T = 3) &= \mathbb{P}(T > 2) - \mathbb{P}(T > 3) = \mathbb{P}(X_2 \neq 3) - \mathbb{P}(X_3 \neq 3) = s_0.s_1 - 0 = s_0.s_1 \end{aligned}$$

   (d) On a donc

   $$\mathbb{E}(T) = (1 - s_0) + 2(s_0 - s_0.s_1) + 3s_0.s_1 = 1 + s_0 + s_0.s_1$$

   C'est la formule implémentée dans le programme informatique !