Contrôle continu 02

Le mercredi 13 octobre 2024
durée 1h30

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
Numérotez les copies et questions et soulignez ou $\boxed{\text{encadrez}}$ les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Au niveau rédaction :
- *Faites attention à la validité de vos calculs, vérifiez les autant que possible.*
- *Rédigez entièrement les raisonnements par récurrence (pas de « et ainsi de suite ») justifiant un résultat valable pour un entier quelconque.*

Exercice I

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Donner une base de chacun des espaces propres de A.
3. Donner une matrice D diagonale, une matrice P inversible telles que $P^{-1}.A.P = D$.
4. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = & 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

Donner une formule pour u_n et v_n en fonction de n.

Exercice II

On considère la matrice U et le vecteur V :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de U. La valeur 0 est-elle valeur propre de U ? Quelle est sa multiplicité géométrique ?
2. Montrer que le vecteur V est vecteur propre de U. Donner la valeur propre associée.
3. Donner une matrice diagonale semblable à U.
4. Généraliser au cas de U_n, la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.

Exercice III

Questions diverses

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Justifier avec le minimum de calculs que A est diagonalisable et donner son spectre.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner le spectre de A et justifier avec le minimum de calculs que A n'est pas diagonalisable.

3. En Python/Numpy, la fonction `np.linalg.eig` appliquée à une matrice carrée `A` retourne un couple `V,P` où `V` est un tableau numpy comportant les valeurs propres de `A` dans un certain ordre et `P` est une matrice comportant, dans chacune de ses colonnes un vecteur propre de `A` associé à une valeur propre avec le même ordonnancement. Les deux encadrés suivants montrent un script Python et le résultat de son exécution.

```
import numpy as np
A = np.array([
    [0,0,0,0.25],
    [1,0,0,0.25],
    [0,1,0,0.25],
    [0,0,1,0.25]
    ])
vp, P = np.linalg.eig(A)
print("valeurs propres = ",vp)
print("matrice P =",P)
```

```
valeurs propres =  [-0.606+0.j     -0.072+0.638j -0.072-0.638j  1.    +0.j    ]
matrice P = [[ 0.294+0.j      0.03 +0.265j  0.03 -0.265j  0.183+0.j    ]
 [-0.191+0.j      0.435+0.172j  0.435-0.172j  0.365+0.j    ]
 [ 0.609+0.j      0.221-0.438j  0.221+0.438j  0.548+0.j    ]
 [-0.712+0.j     -0.685+0.j     -0.685-0.j      0.73 +0.j    ]]
```

Y-a-t'il une valeur propre évidente pour A ? Déterminer par un calcul manuel un vecteur propre associé à cette valeur propre dont les composantes sont toutes des entiers naturels. Est-ce cohérent avec la matrice P affichée ?

Exercice IV

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les puissances J^2, J^3 et J^4.

2. Au vu de ces calculs, la matrice J est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

3. On admet que le spectre complexe de J est constitué des nombres $1, -1, i, -i$ (où i est le nombre complexe bien connu).

Donner une base de chacun des sous-espaces propres de J.

4. Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, une matrice D diagonale telles que

$$P^{-1}.J.P = D$$

5. Donner $P^{-1}.J^2.P$, $P^{-1}.J^3.P$.

6. On considère quatres nombres complexes a_0, a_1, a_2 et a_3, la fonction polynomiale $f : x \mapsto a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

6.a. Après avoir écrit A comme une combinaison linéaire de $I = J^0$, J, J^2 et J^3, déterminer $P^{-1}.A.P$.

6.b. Donner le déterminant de A en utilisant la fonction f ou les a_0, a_1, a_2, a_3.

Correction Contrôle continu 02

Correction Ex.–1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Un nombre complexe λ est dans le spectre de A ssi $A - \lambda.I_2$ n'est pas inversible ssi $\det(A - \lambda.I_2) = 0$.
Ici $\det(A - \lambda.I_2) = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 4^2 = \lambda^2 - 3^2 - 4^2 = \lambda^2 - 25$ et

$$\lambda \in \text{Spec}A \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ou } \lambda = -5$$

$$\text{Spec}A = \{-5, +5\}$$

2.

— Calcul de $E_A(5)$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_A(5) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 3x & +4y & = & 5x \\ 4x & -3y & = & 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} -2x & +4y & = & 0 \\ 4x & -8y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2y = x$$

et donc

$$E_A(5) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et la famille de un vecteur $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_A(5)$.

— Calcul de $E_A(-5)$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_A(5) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 3x & +4y & = & -5x \\ 4x & -3y & = & -5y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 8x & +4y & = & 0 \\ 4x & +2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2x = -y$$

et donc

$$E_A(-5) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et la famille de un vecteur $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_A(-5)$

3. Si on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, la matrice P est constituée–par colonne–de vecteurs propres de A associés, dans cet ordre, aux v.p.$+5$ et -5, P est inversible (son déterminant vaut $-5 \neq 0$.) et donc

$$P = (V_+|V_-),\, A.P = (5V_+|-5V_-),\, P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

4. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = & 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

Si ON pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ alors on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n.X_0 = P.D^n.P^{-1}.X_0$$

On a

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}.P, P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Effectuons le produit $P.D^n.P^{-1}.X_0$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2.5^n & (-5)^n \\ 5^n & -2.(-5)^n \end{pmatrix} & 5^n.\begin{pmatrix} 2-(-1)^n \\ 1+2.(-1)^n \end{pmatrix} \end{array}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2-(-1)^n).5^n, \ v_n = (1+2.(-1)^n).5^n$$

NB : (Une petite vérification n'est pas inutile) On a avec cette formule $u_0 = 1, v_0 = 3$, $u_1 = 15 = 3+12$, $v_1 = -5 = 4-9$: ces valeurs sont cohérentes avec la récurrence !

Correction Ex.–2 On considère la matrice U et le vecteur V :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le rang de U est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de U. Ici $\mathrm{Im}\, U = \mathrm{Vect}\langle V \rangle$ et $\mathrm{rg}(U) = 1$. On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, U = 3-1 = 2$. La valeur 0 donc valeur propre de U, de multiplicité géométrique 2.

2. On a $U.V = 3.V$ et donc le vecteur V est vecteur propre de U associé à la v.p.3.

3. La matrice U est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. De façon analogue, le noyau de U_n est de dimension $n-1$ et V est vecteur propre associé à la valeur propre n. La matrice U est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Correction Ex.–3 Questions diverses

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriuce A est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont les termes sur la diagonale et donc $\mathrm{Spec} A = \{-1, -2, 3\}$. Elle est de taille 3x3, possède 3 valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sev propres est $1+1+1 = 3$).

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec le même argument que précédemment, $\mathrm{Spec}A = \{2\}$. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $P^{-1}.A.P = 2.I_3$ et on aurait alors $A = 2I_3$, ce qui est faux.

3. La matrice A vaut

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

D'après le calcul Python la dernière valeru propre affichée semble être 1. Vérifions le en calculant Ker $(A - I_4)$.

On a $(A - I_4).X = 0$ (pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$) si et seulement si

$$\frac{1}{4}t = x, x - y + \frac{1}{4}t, y - z + \frac{1}{4}t, z - \frac{3}{4}t = 0$$

ce qui équivaut à

$$x = \frac{1}{4}t, y = \frac{2}{4}t, z = \frac{3}{4}.t$$

et donc

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si le calcul est cohérent, ce vecteur est proportionnel à la dernière colonne de la matrice P et on voit qu'effectivement $0.183 * 2 = 0.366$, $0.183 * 3 = 0.549$, $0.183 * 4 = 0.732$.

Correction Ex.–4

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^4 = I_4$$

2. Au vu de ces calculs, $J.J^3 = J^4 = I_4$ et donc la matrice J est inversible avec $J^{-1} = J^3$.

3.

— Calcul de $E_A(1)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vérfiie $A.X = X$ si et seulement si

$$t = x, x = y, y = z, z = t$$

et donc

$$E_A(1) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— Calcul de $E_A(-1)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vérfiie $A.X = X$ si et seulement si

$$t = -x, x = -y, y = -z, z = -t$$

et donc

$$E_A(-1) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— Calcul de $E_A(i)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vérfiie $A.X = X$ si et seulement si

$$t = ix, x = iy, y = iz, z = it$$

et donc

$$E_A(i) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— Calcul de $E_A(-i)$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vérfiie $A.X = X$ si et seulement si

$$t = -ix, x = -iy, y = -iz, z = -it$$

et donc

$$E_A(-i) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1}.J.P = D$$

5.

$$P^{-1}.J^2.P = D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}.J^3.P = D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

6. On considère quatres nombres complexes a_0, a_1, a_2 et a_3, la fonction polynomiale $f : x \mapsto a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

6.a. On a $A = a_0.I_4 + a_1.J + a_2.J^2 + a_3.J^3$ et donc

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(-i) \end{pmatrix}$$

6.b. Le déterminant de A est le déterminant de cette matrice diagonale, à savoir :

$$\begin{aligned} f(1).f(-1).f(i).f(-i) &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_0 - a_1 + a_2 - a_3)(a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i)(a_0 - a_1 i - a_2 + a_3 i) \\ &= ((a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2).((a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2). \end{aligned}$$