Corrigé TD III – Optimisation sous contraintes

---

1 Contraintes d'égalités

Exercice 1.1 (Points critiques sous contraintes)**.** Soient $f, g : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y) = xy \quad \& \quad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

1. On cherche les points critiques du Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3}\right).$$

On trouve alors les équations

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{x^2} \\ x = -\dfrac{\lambda}{y^2} \end{cases}$$

En substituant on obtient $yx^2 = xy^2$. Comme $x, y \neq 0$ (sinon g n'est pas définie) on doit donc avoir $x = y$. En remplaçant dans la contrainte on a alors

$$\frac{2}{3} = g(x,y) = \frac{2}{x}$$

donc $x = y = 3$. La valeur correspondante de f est alors $f(3,3) = 9$.

2. On cherche les points critiques du Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda(xy - 9)$$

On trouve alors les équations

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = \lambda y \\ -\dfrac{1}{y^2} = \lambda x \end{cases}$$

En particulier, $\lambda \neq 0$ donc $y = -1/(\lambda x^2)$. En substituant on trouve alors $\lambda^2 x^4 = \lambda x$. Comme $x \neq 0$ (sinon g n'est pas définie) on doit donc avoir $x^3 = \lambda^{-1}$. De même, $y^3 = \lambda^{-1}$ donc $x^3 = y^3$ et finalement $x = y$. En remplaçant dans la contrainte on a alors

$$9 = f(x,y) = x^2,$$

donc $x = y = \pm 3$. Les valeurs correspondantes de g sont $-2/3$ et $2/3$.

Exercice 1.2 (Distance d'un point à une partie). **1**. Tout d'abord, on constate que l'ensemble $\mathcal{E}$ est compact puisqu'il est fermé comme préimage de $\{1\}$ par la fonction continue $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + (x + y)^2$ et qu'il est borné car pour $(x, y) \in \mathcal{E}$, on a $|x|, |y| \leqslant 1$. Donc f y admet un minimum global. Pour le trouver, on cherche les points critiques du Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x + y)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + (x + y)^2 - 1).$$

On trouve alors les équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x - 2 + 2x + 2y & = & 2\lambda x + 2\lambda x + 2\lambda y \\ 2y - 2 + 2y + 2x & = & 2\lambda y + 2\lambda y + 2\lambda x \end{array}\right.$$

qu'on peut simplifier en

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1 - \lambda)(2x + y) & = & 1 \\ (1 - \lambda)(2y + x) & = & 1 \end{array}\right.$$

On observe en particulier que $\lambda \neq 1$, et qu'en divisant on obtient alors $2x + y = 2y + x$, qui donne $x = y$. En reportant dans la contrainte on trouve finalement

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + x^2 + (x + x)^2 \\ &= 6x^2 \end{aligned}$$

donc $x = y = \pm\sqrt{6}$. Il reste à calculer les valeurs de f correspondantes :

$$f(\sqrt{6}, \sqrt{6}) = 38 - 4\sqrt{6} \quad \& \quad f(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}) = 38 + 4\sqrt{6}.$$

La plus petite de ces deux valeurs étant la première, le minimum est atteint au point $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

2. (a) Si $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, alors $z = -x - y$, donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x + y)^2 &= x^2 + y^2 + (-x - y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

et $(x, y) \in \mathcal{E}$.

(b) Si $(x, y) \in \mathcal{E}$, alors en posant $z = -x - y$ on a $x + y + z = 0$ et

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + (-x - y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + (x + y)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $(x, y, -x - y) \in \mathcal{C}$.

3. Trouver le point le plus proche de A revient à minimiser F sous les contraintes définissant $\mathcal{C}$. Or, comme F est une fonction positive, la minimiser est équivalent à minimiser son carré. En coordonnées, on a

$$F(x, y, z)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2.$$

La fonction $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, -x - y)$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ et $f = F \circ \Phi$. Donc, minimiser F sur $\mathcal{C}$ est équivalent à minimiser f sur $\mathcal{E}$, ce qui permet de conclure par la première question : le point le plus proche est celui de coordonnées $(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 1 - 2\sqrt{6})$.

Exercice 1.3 (Mesure de Gibbs). **1**. Il faut tout d'abord remarquer que cet ensemble est fermé, ce qui suit du fait que la fonction $p \mapsto \mathcal{E}(p)$, étant linéaire, est continue. Il est de plus borné car l'ensemble des valeurs possibles de p est lui-même borné. Donc, si nous montrons que S est continue, nous pourrons conclure. Pour ce faire, rappelons que $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc chacune des fonctions sommées est continue. Par conséquent, S également.

2. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec deux contraintes d'égalité :

$$g_1(p) = \mathcal{E}(p) - \mathcal{E}_0 \quad \& \quad g_2(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1.$$

Commençons par calculer les dérivées partielles des fonctions impliquées :

$$\frac{\partial S}{\partial p_i}(p) = \ln(p_i) + 1 \quad ; \quad \frac{\partial g_1}{\partial p_i}(p) = E_i \quad ; \quad \frac{\partial g_2}{\partial p_i}(p) = 1.$$

Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\ln(\widetilde{p}_i) + 1 = \lambda_1 E_i + \lambda_2.$$

En passant à l'exponentielle, on en déduit que

$$\widetilde{p}_i = e^{\lambda_1 E_i - 1 - \lambda_2} = \frac{1}{Z} e^{-\lambda E_i}$$

avec $\lambda = -\lambda_1$ et $Z = e^{1+\lambda_2}$.

3. Commençons par donner une expression plus explicite :

$$\begin{aligned} S(\mathcal{E}) &= \sum_{i=1}^{N} \widetilde{p}_i \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\lambda E_i}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \widetilde{p}_i \ln(Z) - \lambda \sum_{i=1}^{N} \widetilde{p}_i E_i \\ &= -\ln(Z) - \lambda\mathcal{E}. \end{aligned}$$

C'est une fonction affine, dont la dérivée vaut $-\lambda$.

Exercice 1.4 (Inégalité arithmético-géométrique). On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \quad \& \quad g(x_1, \cdots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

1. La fonction g est continue, donc $\mathcal{C}$ est fermé. De plus, si $x \in \mathcal{C}$, alors $0 \leqslant x \leqslant n$, donc $\mathcal{C}$ est borné. Ainsi, c'est un ensemble compact. Comme f y est continue, elle y admet un maximum global.

2. S'il existe un $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x) = 0$. Ceci n'étant pas un maximum, les contraintes d'inégalités sont toutes inactives à l'extremum. On peut par conséquent se contenter des contraintes d'égalités. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x)}{nx_i} \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{1}{n},$$

donc à l'extremum, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(x)}{nx_i} = \frac{\lambda}{n},$$

ce qui donne $f(x) = \lambda x_i$. Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = 0$ qui n'est clairement pas un maximum, donc $\lambda \neq 0$ ce qui implique que tous les x_i sont égaux. La contrainte impose alors $x_i = 1$ et donc $f(x) = 1$.

3. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda x) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(\lambda x_i)\right)^{1/n} \\
&= \left(\lambda^n \prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \\
&= \lambda \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
g(\lambda x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \\
&= \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \lambda g(x).
\end{aligned}$$

4. Si $x = 0$, les deux quantités sont égales. Sinon, $g(x) \neq 0$ et on peu donc poser $x' = x/g(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}
g(x') &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{g(x)} \\
&= \frac{g(x)}{g(x)} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donc $f(x') \leqslant 1$. On conclut en utilisant l'homogénéité :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(g(x)x'\right) \\
&= g(x)f(x') \\
&\leqslant g(x) \times 1 \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Exercice 1.5 (Un contre-exemple). On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x,y) = y \quad \& \quad g(x,y) = y^3 - x^2.$$

On note $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$.

1. Pour tout $(x,y) \in E$, on a

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y \\
&= x^{\frac{2}{3}} \\
&\geqslant 0 \\
&= f(0,0),
\end{aligned}$$

donc f a un minimum global en $(0,0)$.

2. On a $\nabla f(0,0) = (0,1)$ tandis que $\nabla g(0,0) = (0,0)$, donc un tel λ n'existe pas.

3. En un tel point, on a
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$
donc $x = 0$ et $y \neq 0$. Réciproquement, si $x = 0$ et $y \neq 0$, l'équation précédente a pour solution $\lambda = 1/3y^2$. Ainsi, il y a une infinité de point critiques sous contraintes, mais l'unique minimum n'en fait pas partie.

Exercice 1.6 (Comme au partiel)**.** On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-1)^2 + y^2 \leqslant 4\}$ ainsi que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$.

1. Tout d'abord, $\mathcal{C}$ est fermé car il est défini par des inégalités larges. De plus, si $(x,y) \in \mathcal{C}$, alors $y^2 \leqslant 4$ donc $y \in [-2,2]$. Enfin, si $(x,y) \in \mathcal{C}$, alors $(x^2-1)^2 \leqslant 4$, donc $x^2 - 1 \in [-2,2]$ c'est-à-dire $x^2 \in [-1,3]$ ce qui veut dire que $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est également borné, donc compact.

2. La fonction f est continue car polynomiale, donc elle admet un minimum global et maximum global sur $\mathcal{C}$.

3. (a) Un calcul immédiat donne $\nabla f(x,y) = (y,x)$.
   (b) Les points critiques de f sur un ouvert vérifient $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ce qui donne pour seule solution $(x,y) = (0,0)$. Ce point est bien à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et est donc l'unique point critique.

4. (a) On a
$$\begin{aligned} \partial\mathcal{C} &= \mathcal{C} \setminus \mathring{\mathcal{C}} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-1)^2 + y^2 = 4\}. \end{aligned}$$
   En posant $g(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2 - 4$, on voit que se restreindre à $\partial\mathcal{C}$ revient à imposer la contrainte $g = 0$.
   (b) On commence par calculer le gradient de g :
$$\nabla g(x,y) = (4x(x^2-1), 2y).$$
   Ce dernier s'annule pour $y = 0$ et $x \in \{0,-1,1\}$. Or, aucun des ces trois points n'appartient à $\partial\mathcal{C}$. On peut donc appliquer la méthode de Lagrange. On cherche alors λ tel que
$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$
   La seconde coordonnée donne $x = 2\lambda y$ tandis que la première s'écrit $y = 4\lambda x(x^2-1)$. Si $\lambda = 0$, on trouve $(0,0)$ qui ne vérifie pas la contrainte, donc on peut supposer $\lambda \neq 0$. Alors, $y = x/2\lambda$ et en remplaçant on trouve
$$\frac{x}{2\lambda} = 4\lambda x(x^2-1).$$
   En simplifiant x, on trouve finalement $x^2 - 1 = (8\lambda^2)^{-1}$ et donc
$$x^2 - 1 = (8\lambda^2)^{-1} = \frac{y^2}{2x^2}.$$
   (c) En remplaçant le résultat de la question précédente dans la contrainte, on trouve
$$(x^2-1)^2 + 2x^2(x^2-1) = 4$$
   En développant et en réduisant on trouve une équation bicarrée :
$$3x^4 - 4x^2 - 3 = 0.$$

Cette équation se résout pour donner (on ne garde que la solution positive) $x^2 = (2+\sqrt{13})/3$ et donc finalement

$$x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}.$$

On peut maintenant utiliser la relation $g(x, y) = 0$ pour calculer les valeurs de y correspondantes :

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 - (x^2-1)^2 \\ &= 4 - \left(\frac{2+\sqrt{13}}{3} - 1\right)^2 \\ &= 4 - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{3}\right)^2 \\ &= 4 - \frac{14-2\sqrt{13}}{9} \\ &= \frac{22+2\sqrt{13}}{9}. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a quatre points critiques sous contraintes, de coordonnées

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}, \pm\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{3}\right)$$

5. Calculons les valeurs de f aux points critiques sous contraintes. Si les deux coordonnées sont de même signe, on a

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{13})(22+2\sqrt{13})}}{3\sqrt{3}}$$

et sinon on a

$$f(x, y) = -\frac{\sqrt{(2+\sqrt{13})(22+2\sqrt{13})}}{3\sqrt{3}}.$$

En comparant à $f(0, 0) = 0$, on voit que la première valeur est le maximum de f et la seconde son minimum.

2 Contraintes d'inégalités

Exercice 2.1 (Entraînement)**.** **1**. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points vérifiant les contraintes est fermé car il est défini par des inégalités larges. Montrons qu'il est borné. Comme $x \geqslant 0$, on a pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$y \leqslant 2x + y \leqslant 2.$$

Comme de plus $y \geqslant 0$, on a finalement $y \in [0; 2]$. De même, on montre que $x \in [0; 1]$ et donc que $\mathcal{D}$ est borné. Ainsi, $\mathcal{D}$ est compact et comme f est continue, elle y admet un minimum global.

2. Les gradients des trois contraintes sont $(-1, 0)$, $(0, -1)$ et $(2, 1)$ (les contraintes de signes sont écrites comme $-x \leqslant 0$ et $-y \leqslant 0$). Ces trois vecteurs ne forment bien sûr pas une famille libre, mais par contre si l'on en choisit deux quelconques alors ils ne sont pas colinéaires. Ainsi, si on montre que les trois contraintes ne peuvent être actives en même temps, alors la qualification linéaire des contraintes sera vérifiée. Or, si les trois contraintes sont actives, on doit avoir $x = 0 = y$ et $2x + y = 2$, ce qui est impossible.

3. Le Lagrangien est

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = x^2 + y^2 - \mu_1(2x + y - 2) + \mu_2 x + \mu_3 y,$$

qui mène aux équations, avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \leqslant 0$,

$$\left\{\begin{array}{ccc} -2x & = & 2\mu_1 - \mu_2 \\ -2y & = & \mu_1 - \mu_3 \\ \mu_1(2x + y - 2) & = & 0 \\ \mu_2 x & = & 0 \\ \mu_3 y & = & 0 \end{array}\right.$$

Il faut maintenant distinguer les différents cas :

- Si $\mu_2 = \mu_3 = 0$, on a soit $\mu_1 = 0$, qui donne $x = y = 0$, soit $\mu_1 \neq 0$ qui donne

$$\left\{\begin{array}{ccc} -2x & = & 2\mu_1 \\ -2y & = & \mu_1 \end{array}\right.$$

  et donc $x = 2y$. Comme on a de plus $2x + y = 2$, on obtient finalement $y = 2/5$.
- Si μ_2 et μ_3 sont tous les deux non nuls, alors $x = y = 0$. Ceci implique que $\mu_1 = 0$ mais alors la première équation devient $0 = -\mu_2$ qui contredit $\mu_2 \neq 0$.
- Si $\mu_2 = 0$ et $\mu_3 \neq 0$, alors les conditions de complémentarité impliquent que $y = 0$. Si $\mu_1 = 0$, la seconde équation devient $0 = -\mu_3$ qui contredit $\mu_3 \neq 0$. Si $\mu_1 \neq 0$, on a alors $x = 1$.
- Si $\mu_2 \neq 0$ et $\mu_3 = 0$, alors les conditions de complémentarité impliquent que $x = 0$. Si $\mu_1 = 0$, la première équation devient $0 = -\mu_2$ qui contredit $\mu_2 \neq 0$. Si $\mu_1 \neq 0$, alors $y = 2$.

Nous avons ainsi trois candidats : $(4/5, 2/5)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$. Les valeurs correspondantes de f sont respectivement $-4/5$, -1 et -4. La plus petite de ces valeurs est la dernière, c'est donc le minimum recherché.

Exercice 2.2 (Conditions KKT). **1**. En notant h_1 et h_2 les fonctions donnant les deux contraintes, on a

$$\nabla h_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \& \quad \nabla h_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si une seule des deux contraintes est active, alors $(x, y) \neq (0, 0)$ donc les gradients sont non-nuls et les contraintes sont bien qualifiées. Si les deux contraintes sont actives, alors on a $x = 2 + y$ et donc

$$\nabla h_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2(2 + y) \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Pour que ce vecteur soit colinéaire à $\nabla h_2(x, y)$, il faut que $2y = -2(2 + y)$, c'est-à-dire que $y = -1$. Dans ce cas, on a

$$x^2 + y^2 = (2 - 1)^2 + (-1)^2 = 2 \neq 5,$$

ce qui contredit l'activation de la première contrainte. Ainsi, $\nabla h_1(x, y)$ n'est pas colinéaire à $\nabla h_2(x, y)$ et la qualification linéaire des contraintes est vérifiée.

2. Si on a un extremum en (x, y), alors il existe $\mu_1, \mu_2 \leqslant 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour $x = -1$ et $y = 2$, on obtient le système (la deuxième contrainte est inactive donc $\mu_2 = 0$)

$$\begin{cases} 2 &= -2\mu_1 \\ \beta &= 4\mu_1 \end{cases}.$$

La première équation donne $\mu_1 = -1$ et la seconde $\mu_1 = \beta/4$, d'où $\beta = -4$. Réciproquement, si $\beta = -4$ on peut prendre $\mu_1 = -1$ et $\mu_2 = 0$ (la seconde contrainte est inactive) pour vérifier que $(-1, 2)$ est un point critique sous contraintes.

3. Montrons tout d'abord que les contraintes définissent une partie $\mathcal{D}$ compacte du plan. En effet, $\mathcal{D}$ est fermée car définie par des inégalités larges. De plus, si $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors

$$x^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 5,$$

donc $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ et de même pour y. Ainsi, $\mathcal{D}$ est bien bornée, donc compacte. Comme f est continue, elle admet un minimum global sur $\mathcal{D}$.

Cherchons maintenant les autres points critiques pour $\beta = -4$. Si $\mu_1 = 0$, on doit avoir $\mu_2 = 2$, ce qui est impossible car $\mu_2 \leqslant 0$. Si $\mu_2 = 0$, on doit avoir $x = \mu_1^{-1}$ et $y = -2\mu_1^{-1}$ et comme la première contrainte doit être active,

$$\frac{1 + (-2)^2}{\mu_1^2} = 5,$$

donc $\mu_1^2 = 1$ ce qui donne $\mu_1 = -1$ et donc $(x, y) = (-1, 2)$. Si $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, on a $y = x - 2$ donc

$$x^2 + (x - 2)^2 = 5,$$

ce qui donne $x = 1 \pm \sqrt{6}/2$ et donc $y = -1 \pm \sqrt{6}/2$. Les valeurs correspondantes aux trois points critiques trouvés sont

$$f(-1, 2) = -10$$
$$f\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 6 - \sqrt{6}$$
$$f\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 6 + \sqrt{6}$$

Comme les deux derniers nombres sont supérieurs à -10, on a un minimum global en $(-1, 2)$.

Exercice 2.3 (Insuffisance des conditions KKT)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + y$$

qu'on cherche à optimiser sous la contrainte $xy \leqslant 1$.

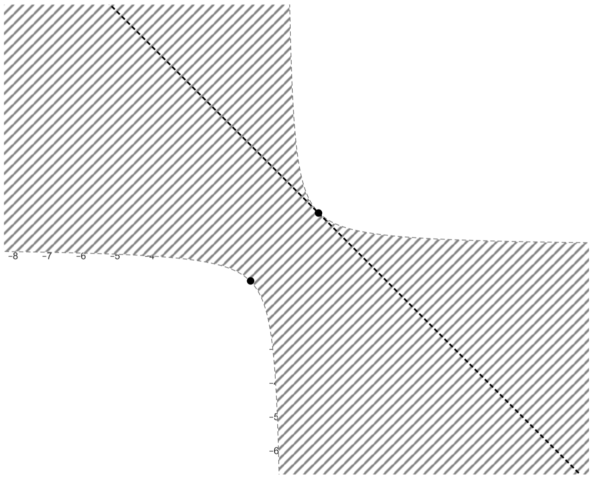
1. En posant $h : (x, y) \mapsto xy - 1$, on a que $\nabla h(x, y) = (y, x)$. Ce vecteur est non-nul pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, ainsi les contraintes sont qualifiées en ces points. Par contre, elles ne sont pas qualifiées en $(0, 0)$.

2. Si les conditions KKT sont vérifiées, il existe $\mu < 0$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

donc on doit avoir $\mu \neq 0$ et $x = y$. Alors, la contrainte étant active on a $xy = 1$, donc $x^2 = 1$ ce qui donne deux possibilités, à savoir $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Mais dans le premier cas on aurait $\mu = 1$, ce qui est impossible. Il n'y a donc qu'un seul point critique sous contraintes.

3. Sur le dessin ci-dessous, on a hachuré l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $xy \leqslant 1$ et on a tracé la droite d'équation $x + y = f(1, 1) = 2$.



On voit donc qu'il y a des points dans la zone hachurée, arbitrairement près de $(1, 1)$, qui sont strictement au-dessus de la droite, c'est-à-dire tels que $x + y > 2 = f(1, 1)$ et d'autres arbitrairement près qui sont strictement en-dessous de la droite, c'est-à-dire tels que $x + y < 2 = f(1, 1)$. Autrement dit, il n'y a pas d'extremum local en $(1, 1)$.

Exercice 2.4 (Au secours du CA)**.** Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1€ pièce. Quant au modèle Y , beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3€. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000,$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. D'après l'énoncé, on a

$$P(x, y) = x + 3y - C(x, y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000$$

2. Il s'agit de maximiser P sous la contrainte $x + y = 20$. En posant $g(x, y) = x + y - 20$, on a $\nabla g(x, y) = (1, 1) \neq 0$ en tout point. On peut donc utiliser la méthode de Lagrange : en un maximum, il existe λ tel que

$$\begin{pmatrix} -10x + 2y + 3 \\ -10y + 2x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées du gradient de P doivent être égales, donc

$$-10x + 2y + 3 = -10y + 2x + 3$$

ce qui donne

$$x = y.$$

En remplaçant dans la contrainte on conclut que $x = y = 10$ et que le profit correspondant est $P(10, 10) = 260$. Pour voir qu'il s'agit également d'un maximum sous les contraintes additionnelles $x, y \geqslant 0$, il suffit de remarquer que les seuls points de $\mathcal{D}$ où elles ne sont pas strictement vérifiées sont $(0, 20)$ et $(20, 0)$. Or,

$$f(0, 20) = -940 = f(20, 0),$$

donc le maximum est bien atteint en $(10, 10)$.

3. Posons $h_1(x,y) = -x$, $h_2(x,y) = -y$ et $h_3(x,y) = x + y - 20$. Il faut d'abord vérifier la qualification des contraintes. Pour cela, on peut remarquer que comme

$$\nabla h_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

toute famille formée d'un ou deux de ces vecteurs est libre. Il suffit donc de voir que les trois contraintes ne peuvent être actives en même temps, ce qui est évident : on aurait alors $x = 0 = y$ et $x + y = 20$. Ainsi, la qualification linéaire des contraintes est toujours vérifiée.

On peut donc écrire les conditions KKT : on cherche $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geqslant 0$ tels que

$$\begin{cases} -10x + 2y + 3 & = & -\mu_1 + \mu_3 \\ -10y + 2x + 3 & = & -\mu_2 + \mu_3 \\ \mu_1 x & = & 0 \\ \mu_2 y & = & 0 \\ \mu_3(x + y - 20) & = & 0 \end{cases}$$

Si $\mu_3 \neq 0$, alors $x + y = 20$ et nous sommes dans le cas traité précédemment. Nous pouvons donc supposer $\mu_3 = 0$. Il reste à distinguer selon les deux autres multiplicateurs.

- Si $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, alors $x = y = 0$ et donc $-\mu_1 = 3$ ce qui contredit $\mu_1 \geqslant 0$.
- Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$, alors $x = 0$ et la seconde équation donne $y = 3/10$. Ceci donne dans la première équation
$$-\mu_1 = \frac{6}{10} + 3 > 0,$$
ce qui contredit $\mu_1 \geqslant 0$.
- Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors $y = 0$ et la première équation donne $x = 3/10$. Ceci donne dans la seconde équation
$$-\mu_2 = \frac{6}{10} + 3 > 0,$$
ce qui contredit $\mu_2 \geqslant 0$.
- Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, alors en égalisant les deux premières équations on trouve $x = y$. En remplaçant dans la première ont conclut que $x = 8/3 = y$.

Comme $P(3/8, 3/8) = 8009/8 > P(10, 10)$, le profit sera plus grand si on ne produit pas à pleine capacité.

Exercice 2.5 (Comme à l'examen)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x(1 + y^2)$$

qu'on cherche à minimiser sous les contraintes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leqslant & 4 \\ y & \geqslant & 1 - \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

1. Posons $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4 \quad \& \quad y \leqslant 1 - x^2/4\}$. Comme $\mathcal{D}$ est défini par des inégalités larges, il est fermé. De plus, si $(x,y) \in \mathcal{D}$, alors la première condition donne $x^2, y^2 \leqslant 4$, c'est-à-dire $x, y \in [-2, 2]$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est borné et donc compact. Comme f est polynomiale, elle est continue donc admet un minimum global sur le compact $\mathcal{D}$.

2. Posons $h_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ et $h_2(x,y) = 1 - x^2/4 - y$ et calculons leurs gradients :

$$\nabla h_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \& \quad \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre, sauf si $(x,y) = (0,-1/2)$. Mais ce point ne vérifie pas la seconde contrainte. Par conséquent, la qualification linéaire des contraintes est vérifiée en tous points.

3. (a) Le système KKT associé est, avec $\mu_1, \mu_2 \leqslant 0$,

$$\begin{cases} 1 + y^2 & = & 2\mu_1 x - \dfrac{\mu_2}{2} x \\ 2yx & = & 2\mu_1 y - \mu_2 \\ \mu_1(x^2 + y^2 - 4) & = & 0 \\ \mu_2 \left(1 - y - \dfrac{x^2}{4}\right) & = & 0 \end{cases}$$

(b) Si les deux contraintes sont actives, on à la fois $x^2 + y^2 = 4$ et $1 - y - x^2/4 = 0$. On tire de la seconde équation $x^2 = 4 - 4y$, ce qui réinjecté dans la première donne $y^2 + 4 - 4y = 4$, soit $y^2 = 4y$. Ainsi, $y = 4$ ou $y = 0$. Dans le premier cas, on a $x = 0$ mais la première équation du système n'est alors pas vérifiée. Dans le second cas, $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. La seconde équation du système donne alors $\mu_2 = 0$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

(c) Si $\mu_1 = 0$, et $\mu_2 \neq 0$, on a $y = 1 - x^2/4$. Par ailleurs, la seconde équation donne $\mu_2 = -2yx$ ce qui en remplaçant dans la première donne finalement

$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= yx^2 \\ &= y(4 - 4y) \\ &= 4y - 4y^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, $5y^2 - 4y + 1 = 0$. Cette équation n'a pas de solution et ce cas est donc exclu.

Si maintenant $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$, la première équation implique $\mu_1 \neq 0$ et $x \neq 0$ et l'avant-dernière $x^2 + y^2 = 4$. Si $y = 0$, alors $x = \pm 2$ et $1 = 2\mu_1 x$, donc comme $\mu_1 \leqslant 0$, on doit avoir $x = -2$. Si $y \neq 0$, on peut diviser dans la seconde équation pour obtenir $x = \mu_1$, ce qui réinjecté dans la première donne

$$1 + (4 - x^2) = 2x^2$$

et donc $x^2 = 5/3$. Comme $x = \mu_1 \leqslant 0$, on doit avoir $x = -\sqrt{5/3}$ et on en déduit $y^2 = 7/3$. Pour que $y \geqslant 1 - x^2/4$, il faut le prendre positif, donc $y = \sqrt{7/3}$.

4. Tout d'abord, il reste le cas $\mu_1 = \mu_2 = 0$, mais la première équation n'a pas de solution dans ce cas. Maintenant, il ne reste plus qu'à comparer les valeurs des différents points critiques sous contraintes obtenus :

$$f(-\sqrt{5/2}, \sqrt{3/2}) = 5\sqrt{5}/2\sqrt{2} \quad \& \quad f(-2,0) = -2.$$

La plus petite de ces deux valeurs est la première, c'est donc le minimum.

3 Optimisation linéaire

Exercice 3.1 (Roulez jeunesse !). **1**. Le problème consiste à maximiser $f(x,y) = 16.000x + 10.000y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x + y & \leqslant & 400 \\ 2x + y & \leqslant & 600 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

En oubliant pour l'instant les deux dernières contraintes, les conditions d'existence d'une solution s'écrivent (Attention ! Comme il s'agit de maximiser, les multiplicateurs μ_1 et μ_2 doivent être positifs !)

$$\left\{\begin{array}{ccc} 16.000 & = & \mu_1 + 2\mu_2 \\ 10.000 & = & \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1(x+y) & = & 400\mu_1 \\ \mu_2(2x+y) & = & 600\mu_2 \end{array}\right.$$

La première équation se résout facilement et donne $\mu_1 = 4000$ et $\mu_2 = 6000$. Autrement dit, toutes les contraintes sont actives donc on a (c'est ce que donnent les deux dernières équations)

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 400 \\ 2x+y & = & 600 \end{array}\right.,$$

c'est-à-dire $x = 200$ et $y = 200$. Ces deux nombres sont positifs, donc on a bien trouvé le maximum sous toutes les contraintes, donc ces valeurs vérifient aussi les conditions KKT avec les contraintes de positivité. Comme dans le cas linéaire les conditions KKT sont suffisante, on a trouvé notre extremum. Le profit est alors égal à 5.200.000 €.

2. Si l'on part de 700 unités d'acier, les contraintes sont toujours toutes les deux actives puisque la première équation ne change pas. Par contre, on a maintenant

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 400 \\ 2x+y & = & 700 \end{array}\right.$$

qui donne $x = 300$ et $y = 100$ (qui sont encore positifs), soit un profit de 5.800.000 €.

3. Si l'on suit le raisonnement précédent, on aboutit au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 400 \\ 2x+y & = & 900 \end{array}\right.$$

qui donne $x = 500$ et $y = -100$. Cette solution n'est pas admissible puisque y doit être positif. Par conséquent, on ne peut plus ignorer les contraintes de signe sur les variables. Ainsi, l'une au moins de ces contraintes doit être actives, donc on doit avoir soit $x = 0$ soit $y = 0$ à l'optimum. Si $x = 0$, alors on a au maximum $y = 400$, soit un profit de 4.000.000 €. Si au contraire $y = 0$, on a alors au maximum $x = 400$, soit un profit de 6.400.000 €. C'est cette deuxième solution qui est maximale.

4. (a) Le problème consiste à minimiser la fonction $f(u, v) = 400u + 600v$ sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{ccc} u+v & \geqslant & 10.000 \\ u+2v & \geqslant & 16.000 \\ u & \geqslant & 0 \\ v & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

(b) On calcule la matrice H et le vecteur d correspondants :

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad d = \begin{pmatrix} -10.000 \\ -16.000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème dual consiste à maximiser la fonction $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \mapsto -10.000\mu_1 - 16.000\mu_2$ sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{ccc} 400 & = & -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \\ 600 & = & -\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_4 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 & \leqslant & 0 \end{array}\right.$$

Quitte à remplacer μ_j par son opposé pour tout $1 \leqslant j \leqslant 4$, on a de façon équivalente le problème consistant à maximiser la fonction $(\mu_1, \mu_2) \mapsto 10.000\mu_1 + 16.000\mu_2$ sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{ccc} 400 & = & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ 600 & = & \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_4 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Comme μ_3 et μ_4 sont libres pour peu qu'elles soient positives, les contraintes d'inégalités sont équivalentes à

$$\left\{\begin{array}{ccc} 400 & \geqslant & \mu_1 + \mu_2 \\ 600 & \geqslant & \mu_1 + 2\mu_2 \\ \mu_1, \mu_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

En posant $x = \mu_1$ et $y = \mu_2$, on retrouve bien le problème de départ.

(c) Comme ce problème est dual du précédent, on peut appliquer la dualité de Lagrange forte pour les problèmes linéaires pour conclure que son minimum est atteint pour u et v correspondant aux multiplicateurs donnant le maximum du problème d'origine, c'est-à-dire $u = \mu_1 = 400$ et $v = \mu_2 = 600$.

Exercice 3.2 (Sauve qui peut !). **1**. Le prix total de la location est $f(x, y) = 80000x + 20000y$. Les contraintes sont

$$\left\{\begin{array}{ccc} 200x + 100y & \geqslant & 1600 \\ 6x + 6y & \geqslant & 90 \\ x & \leqslant & 12 \\ y & \leqslant & 9 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

2. Si $x = 0$, on ne peut transporter au maximum que 900 personnes donc il n'y a pas de solution. De même, si $y = 0$ on ne peut transporter au maximum que 72 tonnes de bagages, donc il n'y a pas de solution.

3. Il n'y a pas de contrainte d'égalité, donc il suffit de calculer la matrice H. Celle-ci est par définition (en enlevant les deux contraintes inactives $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$)

$$H = \begin{pmatrix} -200 & -100 \\ -6 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche donc un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^6_-$ tel que

$$\begin{pmatrix} 80.000 \\ 20.000 \end{pmatrix} = H^t \mu$$

4. Supposons d'abord que $x \neq 12$ et $y \neq 9$. Alors, seules les deux premières contraintes sont potentiellement actives, et le problème s'écrit

$$\begin{pmatrix} 80.000 \\ 20.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 & -6 \\ -100 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice s'inverse facilement pour donner l'unique solution de ce système, à savoir

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/100 & 1/100 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80.000 \\ 20.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -600 \\ 40.000/6 \end{pmatrix}.$$

Cette solution n'est pas dans $\mathbb{R}^2_-$, donc il n'existe pas de solution pour laquelle $x \neq 12$ et $y \neq 9$.

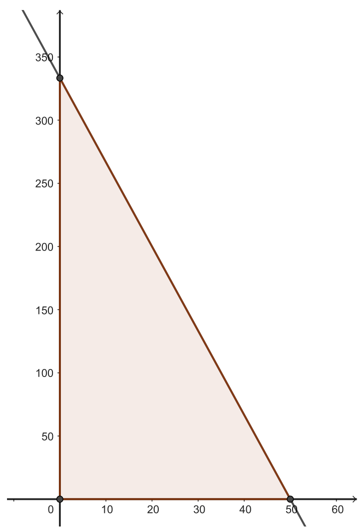
5. Si $x = 12$, il suffit de trouver le nombre minimum d'avions de type B nécessaires pour tout transporter. On a déjà la place pour tous les passagers, mais il manque 12 tonnes de bagages, soit 3 avions de type B. Le coût total est alors $f(12, 3) = 1.020.000$ €.

   Si $y = 9$, il manque 700 sièges pour lesquels il faut 4 avions de type A. Cela permet de transporter un total de 78 tonnes de bagages donc il en manque encore 12, ce qui nécessite 2 avions de type A supplémentaires. Le coût total sera par conséquent $f(6, 9) = 660.000$ €. Cette somme étant inférieure à la précédente, c'est le minimum.

Exercice 3.3. Une entreprise souhaite investir 100.000 € dans deux types de produits : des actions qui coûtent 2000 € l'unité et rapportent sur un an 800 € l'unité ou des lots de terrain coûtant 300 € du mètre carré et engendrant un profit sur un an de 100 € du mètre carré.

1. Il s'agit de maximiser la fonction $f : (x, y) \mapsto 800x + 100y$ sous les contraintes $2000x + 300y \leqslant 100.000$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

2. Voici la figure :



3. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points satisfaisant les contraintes est fermé car il est défini par des inégalités larges. De plus, comme $x \geqslant 0$ on a pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$2000x \leqslant 2000x + 300y \leqslant 100.000,$$

   donc $x \in [0; 50]$. On montre de même que $y \in [0; 1000/3]$, et on conclut ainsi que $\mathcal{D}$ est compact. Comme f est continue, il existe bien un maximum global.

4. D'après le Théorème de la solution-sommet, le maximum est atteint en un sommet de $\mathcal{D}$. Il nous faut donc calculer ces derniers. Pour cela, déterminons les intersections entre les droites définissant $\mathcal{D}$:

   - L'intersection de $2000x + 300y = 100.000$ et $x = 0$ donne $y = 1000/3$, qui vérifie bien les contraintes. Son intersection avec $y = 0$ donne $x = 50$, qui vérifie bien les contraintes.
   - L'intersection de $x = 0$ avec $y = 0$ donne $(0, 0)$, qui vérifie bien les contraintes. Ainsi, on a trois sommets : $(0, 1000/3)$, $(50, 0)$ et $(0, 0)$. Il reste à calculer les valeurs correspondantes : $f(0, 1000/3) = 100.000/3$, $f(50, 0) = 40.000$ et $f(0, 0) = 0$. La plus grande parmi ces valeurs est la deuxième, donc le maximum est atteint pour $x = 50$ et $y = 0$ et vaut 40.000 €.