Licence 3
Analyse 1
2024-2025

# Évaluation 3 (18 décembre)

**Exercice 1** Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n + \cos n}{n^2+n+1}; \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 2** Calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$(a)\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)(t+2)}; \qquad (b)\quad J = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, dt.$$

**Exercice 3** Dans chaque cas suivant, étudier la nature de l'intégrale $J$. On ne demande pas d'en calculer la valeur.

$$(a)\quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}(|\ln t| + t)} dt; \qquad (b)\quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}+t^2} dt.$$

$$(c)\quad J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}; \qquad (d)\quad J = \int_0^{1} \frac{e^{-t}-1}{t\sqrt{t}} dt.$$

$$(e)\quad J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt; \qquad (f)\quad J = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3 \ln t} dt.$$

**Exercice 4**

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel $x$ l'intégrale suivante :
$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-tx}}{t} dt$$
est convergente.

2. Soit $A > 0$. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est dérivable sur l'intervalle $[A, +\infty[$ et calculer la valeur de $h'(x)$ pour tout $x \geq A$.

3. Démontrer que la fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner la valeur de $h'(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Donner la valeur de $h(1)$ puis utiliser les questions précédentes pour déterminer la valeur de $h(x)$ pour tout $x > 0$.

# Évaluation 3 (18 décembre) : correction

**Exercice 1** ($a$) La série est à termes positifs. Notons $u_n$ son terme général. Nous avons :

$$u_n = \frac{\ln n(1+\frac{\cos n}{\ln n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \sim \frac{\ln n}{n^2}.$$

En effet, $\dfrac{\cos n}{\ln n} \to 0$ d'après le théorème des gendarmes puisque, pour tout entier $n \geq 2$ :

$$-\frac{1}{\ln n} \leq \frac{\cos n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n}$$

et que $\pm 1/\ln n$ tend vers 0 à l'infini.

Ensuite, nous savons (croissances comparées) que, pour tout $n$ assez grand, on a : $\ln n \leq \sqrt{n}$ et donc :

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ est convergente car $3/2 > 1$ donc, par comparaison par majoration puis équivalents, la série $\sum u_n$ est convergente.

($b$) Notons $u_n$ le terme général de la série. Il n'est pas de signe constant, nous étudions la convergence absolue. Nous avons :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

(Noter que la fonction sinus est à valeurs positives sur $[0, \pi/2]$. Si $n \geq 1$, alors $1/n \in [0,1] \subset [0, \pi/2]$ et donc $\sin(1/n) \geq 0$.)

Or nous savons que $\sin x \sim x$ quand $x$ tend vers 0, donc :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

quand $n$ tend vers l'infini.

Donc :

$$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente car $2 > 1$ donc, par comparaison par équivalence puis majoration, la série $\sum |u_n|$ est convergente. La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente, donc convergente.

**Exercice 2** (a) On détermine d'abord deux constantes $a$ et $b$ telles que :

$$(*) \qquad \frac{1}{(2t+1)(t+2)} = \frac{a}{2t+1} + \frac{b}{t+2}$$

pour tout $t \notin \{-2, -1/2\}$. Pour cela, on multiplie $(*)$ par $2t+1$ puis on remplace $t$ par $-1/2$. On obtient :

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+2} = a,$$

c'est-à-dire : $a = 2/3$. De même, on mutliplie $(*)$ par $t+2$ et on remplace $t$ par $-2$ et l'on obtient :

$$\frac{1}{-4+1} = b,$$

c'est-à-dire : $b = -1/3$.

La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ; l'intégrale $I$ est généralisée à cause de la borne infinie. Soit $c > 0$. Calculons :

$$I_c = \int_0^c \frac{dt}{(2t+1)(t+2)} = \frac{2}{3}\int_0^c \frac{dt}{2t+1} - \frac{1}{3}\int_0^c \frac{dt}{t+2} = \frac{1}{3}\left[\ln(2t+1) - \ln(t+2)\right]_0^c.$$

Donc :

$$I_c = \frac{1}{3}(\ln(2c+1) - \ln(c+2) - \ln 1 + \ln 2) = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{2c+1}{c+2}\right) + \ln 2\right).$$

Quand $c$ tend vers l'infini, $\dfrac{2c+1}{c+2}$ tend vers 2, donc :

$$\lim_{c\to+\infty} I_c = \frac{1}{3}(2\ln 2) = \frac{2\ln 2}{3}.$$

Donc l'intégrale $I$ est convergente et sa valeur est :

$$I = \frac{2\ln 2}{3}.$$

(b). La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ; l'intégrale $I$ est généralisée à cause de la borne infinie. Soit $c > 0$. Pour calculer

$$I_c = \int_0^c e^{-\sqrt{t}}dt,$$

utilisons le changement de variable suivant : $x = \sqrt{t}$. On a :

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dt}{2x} \quad \text{et} \quad dt = 2xdx.$$

Donc :

$$I_c = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{c}} 2xe^{-x}dx = 2\int_0^{\sqrt{c}} xe^{-x}dx.$$

Intégration par parties : on pose

$$u'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = x,$$

d'où

$$u(x) = -e^{-x} \qquad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$I_c = 2\left[-xe^{-x}\right]_0^{\sqrt{c}} + 2\int_0^{\sqrt{c}} e^{-x}dx = 2\left[-xe^{-x}\right]_0^{\sqrt{c}} - 2\left[e^{-x}\right]_0^{\sqrt{c}} = -2\sqrt{c}\, e^{-\sqrt{c}} - 2e^{-\sqrt{c}} + 2.$$

On sait (croissances comparées) que $ue^{-u}$ tend vers 0 quand $u$ tend vers l'infini, donc $\sqrt{c}\, e^{-\sqrt{c}}$ tend vers 0 quand $c$ tend vers l'infini. On en déduit que :

$$\lim_{c\to+\infty} I_c = 2.$$

Donc l'intégrale $I$ est convergente et sa valeur est : $I = 2$.

**Exercice 3** Dans tout la suite, on notera $f$ la fonction à intégrer.

($a$) La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ mais pas définie en 0. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 0. On écrit :

$$J = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt.$$

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ : On a : $\sin t \sim t$ quand $t$ tend vers 0, on a :

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}(|\ln t| + t)} \sim \frac{\sqrt{t}}{|\ln t| + t}.$$

  Quand $t$ tend vers $0^+$, le numérateur $\sqrt{t}$ tend vers 0 et le dénominateur $|\ln t| + t$ tend vers l'infini, donc le quotient tend vers 0. La fonction à intégrer admet donc une limite finie, 0, en la borne finie 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est faussement généralisée, donc convergente.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ : La fonction $f$ n'est pas de signe constant, on étudie la convergence absolue. On a :

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}(\ln t + t)} \leq \frac{1}{\sqrt{t}\ t} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

  L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^{3/2}$ est convergente car $3/2 > 1$. Donc, par comparaison par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est absolument convergente, donc convergente.

En conclusion, l'intégrale $J$ est convergente.

(b). La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ mais pas définie en 0. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 0. On écrit :

$$J = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt.$$

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ : La fonction est à valeurs positives. Quand $t$ tend vers $0^+$ :

$$f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}.$$

  L'intégrale de référence $\int_0^1 dt/t^{1/2}$ est convergente car $1/2 < 1$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est convergente.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ : La fonction est à valeurs positives. Quand $t$ tend vers $+\infty$ :

$$f(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

  L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^{3/2}$ est convergente car $3/2 > 1$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

En conclusion, l'intégrale $J$ est convergente.

(c). La fonction $f$ est continue sur $[1,+\infty[$, il y a donc un problème seulement en $+\infty$. La fonction est à valeurs positives. Quand $t$ tend vers l'infini, on a :

$$f(t) = \frac{1}{t.t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \sim \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ est convergente car $2 > 1$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale $J$ est convergente.

(d).La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$, il y a donc un problème en 0. Elle est de signe constant (négatif) sur cet intervalle, on peut donc utiliser le théorème de comparaison par équivalence. Quand $x$ tend vers 0, on sait que $e^x - 1 \sim x$, donc, quand $t$ tend vers 0, on a :

$$f(t) \sim -\frac{t}{t\sqrt{t}} = -\frac{1}{t^{1/2}}.$$

L'intégrale de référence $\int_0^1 dt/t^{1/2}$ est convergente car $1/2 < 1$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale $J$ est convergente.

(e) La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ mais pas définie en 0. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 0. On écrit :

$$J = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Remarquons aussi que, si $t > 0$, $t \leq 2t$ et donc $e^{-t} \geq e^{-2t}$. Donc $f$ est à valeurs positives.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ : Nous avons :

  $$e^{-t} - e^{-2t} = e^{-t}(1 - e^{-t}).$$

  Or, quand $t$ tend vers 0, $e^{-t}$ tend vers 1 et $1 - e^{-t} \sim t$ (déjà vu plus haut), donc :

  $$f(t) \sim \frac{t}{t} = 1.$$

  La fonction $f$ admet donc une limite finie en la borne finie 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est faussement généralisée donc convergente.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ : Nous avons, pour $t \geq 1$ :

  $$f(t) \leq e^{-t} - e^{-2t}.$$

  Les deux intégrales de référence $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-2t}dt$ sont convergentes car $1 > 0$ et $2 > 0$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ converge par majoration.

En conclusion, l'intégrale $J$ est convergente.

(f).La fonction $f$ est continue sur $]1,+\infty[$ mais pas définie en 1. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 1. On écrit :

$$J = \int_1^2 f(t)\ dt + \int_2^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Remarquons aussi que, si $t > 1$, $t \leq 2t$ et donc $e^{-t} \geq e^{-2t}$. Donc $f$ est à valeurs positives.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ dt$ : Nous savons que, quand $x$ tend vers 0, $\ln(1+x) \sim x$. Or quand $t$ tend vers 1, $t-1$ tend vers 0 donc, quand $t$ tend vers 1 :
$$\ln t = \ln(1+(t-1)) \sim t-1$$
et donc :
$$f(t) \sim \frac{t-1}{1.(t-1)} = 1.$$
La fonction $f$ admet donc une limite finie en la borne finie 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ dt$ est faussement généralisée donc convergente
- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\ dt$ : On a, pour tout $t \geq e$ :
$$f(t) \leq \frac{t}{t^3 \ln t} = \frac{1}{t^2 \ln t} \leq \frac{1}{t^2}.$$
Or l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ est convergente car $2 > 1$. Il en est de même de l'intégrale $\int_e^{+\infty} dt/t^2$ et donc, par comparaison par majoration, de l'intégrale $\int_e^{+\infty} f(t)\ dt$. La fonction $f$ étant continue sur l'intervalle $[2, e]$, on en déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

En conclusion, l'intégrale $J$ est convergente.

**Exercice 3**

**1.** La fonction à intégrer est continue sur $]0, +\infty[$ mais pas définie en 0. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 0. On écrit :
$$J = \int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt.$$
- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\ dt$ : Nous avons :
$$e^{-t} - e^{-xt} = e^{-t}(1 - e^{-(x-1)t}).$$
Or, quand $t$ tend vers 0, $e^{-t}$ tend vers 1 et $1 - e^{-(x-1)t} \sim (x-1)t$ (déjà vu plus haut), donc :
$$f(t) \sim \frac{(x-1)t}{t} = x - 1.$$
La fonction $f$ admet donc une limite finie, $x-1$ en la borne finie 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\ dt$ est faussement généralisée donc convergente.
- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\ dt$ : Considérons trois cas :
  - cas où $x > 0$ :
    Nous avons, pour $t \geq 1$ :
    $$\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{-xt}}{t} \leq e^{-xt}.$$
    Les deux intégrales de référence $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-xt}dt$ sont convergentes car $1 > 0$ et $x > 0$, donc les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t}\ dt$ sont convergentes par majoration (les deux fonctions à intégrer sont bien à valeurs positives) ; donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\ dt$ est convergente.

– cas où $x = 0$ : dans ce cas, la fonction est à valeurs négatives et :

$$\frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} = \frac{e^{-t} - 1}{t} \sim -\frac{1}{t}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t$ est divergente donc, par équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt$ l'est aussi.

– cas où $x < 1$ : dans ce cas, la fonction est à valeurs négatives. Étudions l'intégrale de son opposé. Quand $t$ tend vers l'infini, $e^{-tx}$ tend vers l'infini et $e^{-t}$ tend vers 0, donc :

$$\frac{e^{-xt} - e^{-x}}{t} \sim \frac{e^{-tx}}{t}.$$

Croissances comparées : pour $t$ assez grand (par exemple pour $t \geq A$), , nous savons que $e^{-tx} \geq t$ donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t}\, dt \geq \int_A^{+\infty} 1\, dt = +\infty.$$

Donc, par équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt$ est divergente.

En conclusion, l'intégrale $J$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

**2.** Nous utilisons le théorème du cours sur la dérivation de fonctions définies par une intégrale à paramètre.

- **(H0)** : l'intégrale qui définit $h(x)$ est bien absolument convergente puisqu'elle est convergente et que la fonction à intégrer est de signe constant (positif ou nul si $x \geq 1$ et négatif sinon).
- **(H1)** : notons :

$$f(x,t) = \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}.$$

Cette fonction est dérivable par rapport à $x$ en tout point et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{-tx}}{t} = e^{-tx}.$$

- **(H2)** : nous cherchons une majoration de la forme :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad \forall x \in [A, +\infty[ \qquad e^{-tx} \leq g(t),$$

où $g$ est une fonction pour laquelle $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.
Nous avons, pour tout $x \in [A, +\infty[$ : $-tx \leq -tA$, donc :

$$e^{-tx} \leq e^{-tA}.$$

On pose donc :

$$g(t) = e^{-tA}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est une intégrale de référence convergente car $A > 1$.

Les hypothèses (H0), (H1) et (H2) sont satisfaites, on peut donc déduire du théorème que la fonction $h$ est dérivable sur l'intervalle $[A, +\infty[$ et que, pour tout $x \in [A, +\infty[$ :

$$h'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt.$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement. On trouve finalement, pour tout $x \in [A, +\infty[$ :

$$h'(x) = \frac{1}{x}.$$

**3.** Soit $x > 0$. On choisit un $A \in ]0, x[$, par exemple $A = x/2$, et on peut appliquer le résultat de la question précédente puisqu'on a bien $x \in [A, +\infty[$. Donc $h$ est dérivable au point $x$ et $h'(x) = \frac{1}{x}$.

**4.** On a :

$$h(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}}{t} \, dt = 0.$$

Comme, pour tout $x > 0$, $h'(x) = 1/x$, on a :

$$\forall x > 0 \qquad h(x) = \ln x + C,$$

où $C$ est une constante qu'il nous faut déterminer. Comme $h(1) = 0$, on a :

$$0 = h(1) = \ln 1 + C = C,$$

donc $C = 0$. Finalement, pour tout $x > 0$, $h(x) = \ln x$.