QCM **TEST**

Test
Examen du 0/0/2018

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions sont par défaut posées au pluriel mais il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs réponses.

Question 1 ♣ **2.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont bilinéaires?

- A $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1 \end{array}$
- B $\varphi: \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{array}$
- C $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + x^2 \end{array}$
- D $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + 2y \end{array}$
- E $\varphi: \begin{array}{l} C^0([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{array}$
- F $\varphi: \begin{array}{l} C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + 2f'(t)g'(t)dt \end{array}$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ **2.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont symétriques?

- A $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1 \end{array}$
- B $\varphi: \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{array}$
- C $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + 2y \end{array}$
- D $\varphi: \begin{array}{l} C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + 2f'(t)g'(t)dt \end{array}$
- E $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + x^2 \end{array}$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ **2.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont positives?

- [A] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+2y \end{array}$
- [B] $\varphi : \begin{array}{l} C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + 2f'(t)g'(t)dt \end{array}$
- [C] $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{array}$
- [D] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 - 4y_1y_2 \end{array}$
- [E] $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{array}$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ **2.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont définies?

- [A] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+2y \end{array}$
- [B] $\varphi : \begin{array}{l} C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + 2f'(t)g'(t)dt \end{array}$
- [C] $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{array}$
- [D] $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{array}$
- [E] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 - 4y_1y_2 \end{array}$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ **2.1.2** Parmi ces $\mathbb{R}-$ev lesquels sont de dimension finie?

- [A] $\mathbb{C}$
- [B] $\mathbb{R}_{12}[X]$
- [C] $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$
- [D] $\mathbb{R}[X]$
- [E] $C^0([0,1],\mathbb{R})$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ **2.1.4** Parmi ces applications, lesquelles sont des normes euclidiennes?

A $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{2x^2 - 5y^2} \end{array}$

B $\varphi: \begin{array}{l} C^0([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \end{array}$

C $\varphi: \begin{array}{l} C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 - 2f'(t)^2 dt} \end{array}$

D $\varphi: \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}^2 + 9a_{21}^2 + a_{22}^2} \end{array}$

E $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$

F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ **2.1.4** Parmi ces égalités, lesquelles sont vraies?

A $\langle u-v, u-2v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

B $\langle 2u, v\rangle = 2\langle v,u\rangle$

C $||u+v||_2^2 = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

D $||u+v||_2^2 = ||u||_2^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||_2^2$

E $\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ **2.3** Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$?

A $((1,1),(-1,-1))$

B $((1,1))$

C $((1,1),(0,1))$

D $((1,1),(-1,1))$

E $((1,1),(0,1),(1,0))$

F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ **2.4.1** Les familles suivantes sont-elles des familles orthonormales (Je donne le produit scalaire associé dans les réponses)?

A $(\sin, \cos)$ pour $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$

B $(\frac{2}{\pi}\sin, \frac{2}{\pi}\cos)$ pour $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$

C $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), (0,0,1))$ pour $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$

D $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ pour $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ **2.4.1** Quelles réponses sont vraies? (E est un ev préhilbertien).

- A $||\sin||_2^2 + ||\cos||_2^2 = ||\sin + \cos||_2^2$ pour $||f||_2 = \sqrt{\int_0^\pi f(t)^2 dt}$
- B $\forall u, v, w, t \in E, ||u + v + w + t||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + ||w||_2^2 + ||t||_2^2$
- C si (u, v) est orthogonale, $||2u - v||_2^2 = 4||u||_2^2 + ||v||_2^2$
- D $\forall u, v, w \in E, ||u + v + w||_2^2 = ||u||_2^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||_2^2 + 2\langle u, w\rangle + 2\langle w, v\rangle + ||w||_2^2$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ **2.4.1** Quelles réponses sont vraies?

- A Une famille libre peut être orthogonale
- B Toute famille liée est orthogonale
- C Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre
- D Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est une base
- E Une base peut être orthogonale
- F Une famille liée peut être orthogonale
- G Toute famille orthogonale est libre
- H Toute famille libre est orthogonale
- I Toute base est orthogonale
- J Toute famille orthonormale est une base
- K Toute famille orthogonale est une base
- L Toute famille orthonormale est libre
- M *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ **2.4.2** Les familles suivantes sont-elles des bon?

- [A] $(\sin,\cos)$: de l'ev $C^0([0,1],\mathbb{R})$ pour $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$
- [B] $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$: de l'ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}$
- [C] $(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(2\cdot))$: de l'ev $\mathrm{Vect}(1,\sin(2\cdot))$ pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$
- [D] $(\frac{2}{\pi}\sin, \frac{2}{\pi}\cos)$: de l'ev $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$
- [E] $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2))$: de l'ev $\mathbb{R}^3$ pour $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_iv_i$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ **2.4.2** Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1,2,1)$ dans la bon $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1))$ pour le produit scalaire canonique de l'ev $\mathbb{R}^3$? Les coordonnées sont dans l'ordre des vecteurs de la bon.

- [A] $\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1$
- [B] $\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
- [C] $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
- [D] $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ **2.4.2** Quelles sont les coordonnées du vecteur $\cos^2$ dans la bon $(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos(2\cdot))$ de l'ev $\mathrm{Vect}(1,\cos(2\cdot))$ pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$? Les coordonnées sont dans l'ordre des vecteurs de la bon.

- [A] $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$
- [B] $\sqrt{\pi}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$
- [C] $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$
- [D] $\sqrt{\pi}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ **2.5** De quels intervalles -1 est-elle la borne inférieure?

- A $]-1.1,2]\cup]2,3]$
- B $]-2,3]$
- C $]-1,3]$
- D $[-1,1]$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ **2.5** De quels intervalles -1.001 est-elle la borne inférieure?

- A $]-2,3]$
- B $[-1,1]$
- C $]-1.01,2]$
- D $]-1,3]$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ **3.3.1** Parmi ces sev de $\mathbb{R}^2$, lesquels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$? (Un dessin est conseillé).

- A $F = \text{Vect}((0,1))$ et $G = \text{Vect}((2,1))$
- B $F = \text{Vect}((0,0))$ et $G = \text{Vect}((0,2))$
- C $F = \text{Vect}((1,1))$ et $G = \text{Vect}((2,1))$
- D $F = \mathbb{R}^2$ et $G = \text{Vect}((0,1))$
- E $F = \text{Vect}((1,1))$ et $G = \text{Vect}((0,1))$
- F $F = \text{Vect}((1,1))$ et $G = \text{Vect}((2,2))$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 ♣ **3.3.1** Quand les sev F et G de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ont-ils aucune chance d'être supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

- A si $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 2$
- B si $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 0$
- C si $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 1$
- D si $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 1$
- E si $\dim(F) = 0$ et $\dim(G) = 3$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 ♣ **3.3.2** Dans $\mathbb{R}^3$, la projection sur F parallèlement à G est-elle définie sur?

- A $F = \text{Vect}((1,1,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0),(1,0,0))$
- B $F = \text{Vect}((1,0,1))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0),(1,0,0))$
- C $F = \text{Vect}((1,1,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,1))$
- D $F = \text{Vect}((1,1,0),(2,2,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0),(2,1,2))$
- E $F = \text{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0),(2,1,2))$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 20 ♣ **3.3.2** Quelle est la projection de $(1,2)$ sur $\text{Vect}(1,1)$ parallèlement à $\text{Vect}(1,0)$

- [A] $(2,0)$
- [B] $(2,2)$
- [C] $(1,0)$
- [D] $(1,1)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 21 ♣ **3.4.1** Quel est l'orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ de $\text{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$?

- [A] $\text{Vect}((-1,-1,1))$
- [B] $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+2z=0, y+z=0\}$
- [C] $\text{Vect}((-1,-1,1),(2,2,-2)$
- [D] $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+z=0, y+z=0\}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 22 ♣ **3.4.1** Parmi ces familles lesquelles sont des bases de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$?

- [A] $((-2,1,1),(-1,0,1),(-1,1,0))$
- [B] $((-1,1,0),(-1,0,1))$
- [C] $((-2,1,1))$
- [D] $((-2,1,1),(-1,0,1))$
- [E] $((-2,0,2),(-1,0,1))$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 23 ♣ **3.4.2** Soit E un ev euclidien et F un sev de E. Parmi ces propositions lesquelles sont vraies?

- [A] $\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^{\perp})$
- [B] F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.
- [C] $F^{\perp}$ est un sev
- [D] F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.
- [E] $F \cap F^{\perp} \neq \{0_E\}$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 24 ♣ **3.5.1** Soit F un sev de $\mathbb{R}^3$ dont une bon est $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1))$, quelle est l'expression de $p_F(x,y,z)$?

- [A] $(\frac{-x-z}{2}, y, \frac{-x-z}{2})$
- [B] $(\frac{x-z}{2}, y, \frac{x-z}{2})$
- [C] $(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2})$
- [D] $(\frac{-x+z}{2}, y, \frac{-x+z}{2})$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 25 ♣ **3.5.1** Soit $F = \text{Vect}(1,0)$, quels vecteurs appartiennent à $F^\perp$?

- [A] $(1,0) - p_{\text{Vect}(3,4)}(1,0)$
- [B] $(1,0) - p_{\text{Vect}(1,0)}(1,0)$
- [C] $(1,2) - p_{\text{Vect}(1,0)}(1,2)$
- [D] $(3,4) - p_{\text{Vect}(1,0)}(3,4)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 26 ♣ **3.5.3** Parmi ces propositions, lesquelles sont vraies?

- [A] $||u+v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2$
- [B] $||u||_2 = ||u - p_F(u)||_2 + ||p_F(u)||_2$
- [C] $||u||_2^2 = ||u - p_F(u)||_2^2 + ||p_F(u)||_2^2$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 27 ♣ **3.6** Soit la base (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$, quels sont les deux premiers vecteurs de l'orthonormalisation de cette base?

- [A] $\frac{e_1}{||e_1||_2}$ et $e_2 - \frac{e_1}{2}$
- [B] $\frac{e_1}{||e_1||_2}$ et $e_2 - \frac{1}{||e_1||_2^2}\langle e_2, e_1\rangle e_1$
- [C] $\frac{e_1}{||e_1||_2}$ et $e_2 - \langle e_2, e_1\rangle e_1$
- [D] $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 28 ♣ **3.7** Soit un sev F de $\mathbb{R}^2$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, p_F(x,y) = (x+y, 2x+2y)$. Que vaut la distance de $(1,0)$ à F?

- A 2
- B $\sqrt{2}$
- C 1
- D $\sqrt{3}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 29 ♣ **3.7** Soient un sev F de $C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ et $f : t \mapsto t$ tel que $p_F(f) = 2\cos$. Que vaut la distance de f à F?

- A $\sqrt{\dfrac{\pi^4}{2} + \dfrac{\pi}{2}}$
- B $\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{\pi}{2}}$
- C $\sqrt{\dfrac{2\pi^3}{3} + 4\pi}$
- D $\sqrt{\dfrac{2\pi^5}{5} - \pi}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 30 ♣ **4.1.1** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?

A $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$

B $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$

C $f : x \mapsto \begin{cases} (x-2)^2\sin(\dfrac{2}{x-2}) & \text{si } \ x \neq 2 \\ -1 & \text{si } \ x = 2 \end{cases}$

D $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } \ x \geqslant 5 \\ -3-x & \text{si } \ x < 5 \end{cases}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 31 ♣ **4.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont positives?

A $\varphi : \begin{array}{l} C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f'(t)-2f(t))^2 dt} \end{array}$

B $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$

C $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$

D $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x|-|y| \end{array}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 32 ♣ **4.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont homogènes?

A $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^3\right) \end{array}$

B $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$

C $\varphi : \begin{array}{l} C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f'(t)-2f(t))^2 dt} \end{array}$

D $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x|-|y| \end{array}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 33 ♣ **2.1.2** Parmi ces applications, lesquelles sont définies?

- [A] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$
- [B] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x| - |y| \end{array}$
- [C] $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3\right) \end{array}$
- [D] $\varphi : \begin{array}{l} C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\int_0^1 (f'(t) - 2f(t))^2 dt} \end{array}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 34 ♣ **4.1.2** Parmi les axiomes suivants, lesquelles font partie de la définition d'une norme $||\cdot||$ sur un ev E?

- [A] $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$
- [B] $\forall u \in E, ||u|| = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.
- [C] $\exists u \neq 0_E, ||u|| = 0$.
- [D] $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = \lambda ||u||$
- [E] $\forall u \in E, ||u|| \geqslant 0$
- [F] $\forall (u,v) \in E^2, ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$
- [G] $||\cdot||$ est bilinéaire.
- [H] $||\cdot||$ est linéaire.
- [I] $||\cdot||$ est symétrique.
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 35 ♣ **4.1.2** Parmi les axiomes suivants, lesquelles font partie de la définition d'une norme $||\cdot||$ sur un ev E?

- [A] $\exists u \neq 0_E, ||u|| = 0$.
- [B] $\forall u \in E, ||u|| \geqslant 0$
- [C] $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = \lambda ||u||$
- [D] $||\cdot||$ est linéaire.
- [E] $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$
- [F] $||\cdot||$ est bilinéaire.
- [G] $\forall (u,v) \in E^2, ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$
- [H] $||\cdot||$ est symétrique.
- [I] $\forall u \in E, ||u|| = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 36 ♣ **4.1.3** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont de limite nulle quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ dans la direction (x, x^2)?

- [A] $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2 + y)}{x^2 + y}$
- [B] $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 + y}$
- [C] $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
- [D] $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 37 ♣ **4.1.3** Pour qu'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ soit continue en un point $a = (a_1, a_2)$, il suffit que

- [A] les limites quand $(x, y) \to a$ dans deux directions soient différentes.
- [B] les limites quand $(x, y) \to a$ dans toutes les directions soient les mêmes.
- [C] $\lim_{x\to a_1} f(x, a_2) = f(a_1, a_2)$ et $\lim_{y\to a_2} f(a_1, y) = f(a_1, a_2)$
- [D] $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = f(a_1, a_2)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 38 ♣ **4.2.1** Parmi les taux d'accroissements suivants, lesquels sont de limite 1

- [A] le taux d'accroissement de exp en 0.
- [B] le taux d'accroissement de ln en 1.
- [C] le taux d'accroissement de $|\cos|$ en 0.
- [D] le taux d'accroissement de sin en 0.
- [E] le taux d'accroissement de $|\cdot|$ en 0.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 39 ♣ **4.2.2** Parmi ces fonctions f, lesquelles vérifient $\partial_x f(1, 1) = 1$?

- [A] $f : (x, y) \mapsto x + \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$
- [B] $f : (x, y) \mapsto -\dfrac{\ln(xy)}{x - 2y}$
- [C] $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^3 + y}$
- [D] $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi x + \pi y)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 40 ♣ **4.2.2** Sous quelles conditions, $\partial_y f(0,1)$ existe-t-elle?

- [A] $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,1)-f(0,1)}{h}$ existe.
- [B] $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1,h)-f(1,0)}{h}$ existe.
- [C] $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h}$ existe.
- [D] $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$ existe.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 41 ♣ **4.3.1** Soit $f : x \mapsto x^3$ parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies?

- [A] f admet un maximum sur $[-1,1[$
- [B] f admet un maximum sur $[0,1]$
- [C] f admet un minimum sur $[-1,1[$
- [D] f admet un extremum local en $x=0$
- [E] f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}$.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 42 ♣ **4.3.2** Parmi ces fonctions, lesquelles admettent exactement deux points critiques?

- [A] $f : (x,y) \mapsto x\exp(y^2)$
- [B] $f : (x,y) \mapsto \cos(\pi x + \pi y)$
- [C] $f : (x,y) \mapsto \ln(\dfrac{x}{y})$
- [D] $f : (x,y) \mapsto xy + x^2 - y^2$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 43 ♣ **4.2.2** Sous quelles conditions, $\partial^2_{xy} f(2,1)$ existe-t-elle?

- [A] $\lim_{h\to 0} \dfrac{\partial_y f(2,1+h)-\partial_y f(2,1)}{h}$ existe.
- [B] $\lim_{h\to 0} \dfrac{\partial_y f(2+h,1)-\partial_y f(2,1)}{h}$ existe.
- [C] $\lim_{h\to 0} \dfrac{\partial_x f(2+h,1)-\partial_x f(2,1)}{h}$ existe.
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 44 ♣ **4.4.2** Quelle est la matrice hessienne en $(1, 2)$ de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy$?

A $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 45 ♣ **5.1** Quelle est la matrice de l'application linéaire $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ dans la base $((1, 1), (1, -1))$?

A $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 46 ♣ **5.1** Parmi ces endomorphismes lesquels sont symétriques?

A L'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

B L'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

C $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

D $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 47 ♣ **5.1** On se donne un endomorphisme symétrique, $\mathcal{B}$ une bon et M la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Lesquelles de ces matrices ne peuvent pas être M?

- [A] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$
- [B] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- [C] $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 & 5 \\ -2 & 10 & 3 & 30 \\ 10 & 3 & 12 & 1 \\ 5 & 30 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
- [D] $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 48 ♣ **5.2** On se donne un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^3$, parmi ces séries de valeurs propres, lesquelles peuvent être celles de u? (Attention, si une valeur propre est de multiplicité 2 elle apparaît deux fois : exemple $1, 1, 2$).

- [A] $1, 2$
- [B] $0, 1, 2$
- [C] $2, 2, 1, 12$
- [D] $1, i, -12$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 49 ♣ **5.2** On se donne un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^4$, dont 1 est valeur propre triple et 2 est valeur propre simple. Parmi les cas de figure suivant, lesquels sont impossibles?

- [A] $E_1 = \text{Vect}((1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}(0,0,-1,1)$
- [B] $E_1 = \text{Vect}((1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}(0,0,0,1)$
- [C] $E_1 = \text{Vect}((1,1,0,0),(1,-1,0,0))$ et $E_2 = \text{Vect}((0,0,-1,1),(0,0,2,-3))$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

0 0
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8
9 9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

QUESTION 1 : A B C D E F G

QUESTION 2 : A B C D E F

QUESTION 3 : A B C D E F

QUESTION 4 : A B C D E F

QUESTION 5 : A B C D E F

QUESTION 6 : A B C D E F

QUESTION 7 : A B C D E F

QUESTION 8 : A B C D E F

QUESTION 9 : A B C D E

QUESTION 10 : A B C D E

QUESTION 11 : A B C D E F G H I J K L M

QUESTION 12 : A B C D E F

QUESTION 13 : A B C D E

QUESTION 14 : A B C D E

QUESTION 15 : A B C D E

QUESTION 16 : A B C D E

QUESTION 17 : A B C D E F G

QUESTION 18 : A B C D E F

QUESTION 19 : A B C D E F

QUESTION 20 : A B C D E

QUESTION 21 : A B C D E

QUESTION 22 : A B C D E F

QUESTION 23 : A B C D E F

QUESTION 24 : A B C D E

QUESTION 25 : A B C D E

QUESTION 26 : A B C D

QUESTION 27 : A B C D E

QUESTION 28 : A B C D E

QUESTION 29 : A B C D E

QUESTION 30 : A B C D E

QUESTION 31 : A B C D E

QUESTION 32 : A B C D E

QUESTION 33 : A B C D E

QUESTION 34 : A B C D E F G H I J

QUESTION 35 : A B C D E F G H I J

QUESTION 36 : A B C D E

QUESTION 37 : A B C D E

QUESTION 38 : A B C D E F

QUESTION 39 : A B C D E

QUESTION 40 : A B C D E

QUESTION 41 : A B C D E F

QUESTION 42 : A B C D E

QUESTION 43 : A B C D

QUESTION 44 : A B C D E

QUESTION 45 : A B C D E

QUESTION 46 : A B C D E

QUESTION 47 : A B C D E

QUESTION 48 : A B C D E

QUESTION 49 : A B C D