Licence 3 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2024-2025

TD : Maths Générales 2

Pour chaque savoir aav, on vous propose une liste d'exercices divers pour atteindre l'apprentissage en profondeur :

- **Classique** *: Tout est dans le nom.*
- **Découverte 1** *: exercices liants moins classiques nécessitant l'utilisation des concepts de cours.*
- **Découverte 2** *: exercices liants moins classiques nécessitant l'utilisation des concepts de cours et éventuellement de nouveaux concepts.*
- **Découverte 3** *: exercices courts sans indication, ouverts.*

Le symbole $\star$ désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté.

1 AAV : Maîtriser l'objet produit scalaire et l'orthogonalité de familles de vecteurs

1.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 1**. $\star$ **Classique : L'exo classique**
Démontrer que les applications suivantes sont des produits scalaires

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y,z),(x',y',z')) & \mapsto & xx'+yy'+zz' \end{array}, \quad \psi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) \times C^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$

▸ **Exercice 2**. $\star\star$ **Classique : Le classique matriciel**
On se place sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application $\phi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (M,N) & \mapsto & \mathrm{tr}({}^tMN) \end{array}$. On rappelle que tr désigne la somme des éléments diagonaux d'une matrice.

1. Calculer $\phi(M,N)$ en fonction des coefficients M_{ij}, N_{ij} pour i et j dans $\{1,2\}$ des deux matrices M et N.
2. En déduire que ϕ est un produit scalaire.
3. Expliquez pourquoi si M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}({}^tMM) = 0$ alors $M = 0$.
4. En déduire que si M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM$ a deux valeurs propres opposées alors $M = 0$.

▸ **Exercice 3**. $\star\star$ **Classique : Manipuler la norme euclidienne**

1. **Visualiser différentes normes euclidiennes :** Reprendre les produits scalaires des exercices 1 et 2 et écrire l'expression de leurs normes euclidiennes $||(x,y,z)||_2, ||f||_2, ||M||_2$. Calculer alors ces normes pour $(x,y,z) = (1,2,3), f_1 : t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}, f_2 : t \mapsto \cos(t)$
2. **Manipuler la norme de l'exo 1 sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$:** Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrer les propriétés d'homogénéité ($||\lambda f||_2 = |\lambda|||f||_2$), de définition (si $||f||_2 = 0$ alors f est nulle) de la norme euclidienne sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
3. **Le cas général :** Soit E un ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Démontrer que la norme euclidienne associée est bien définie, positive et homogène en ne vous servant que des axiomes du produit scalaire.

▸ **Exercice 4**. $\star\star\star$ **Découverte 1 : Des produit scalaire plus futés**

1. On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$, pour quels entiers naturels n, l'application

$$\varphi : (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \in \mathbb{R}$$

est-elle un produit scalaire ?

2. On se place sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Soient f, g deux fonctions de E. On définit φ par

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.

▸ **Exercice 5**. $\star$ **Classique : Savoir montrer qu'une famille est orthogonale**
Démontrer si les familles suivantes sont orthogonales, orthonormales

1. $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1))$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

▸ **Exercice 6**. $\star$ **Classique : Savoir montrer qu'une famille est orthogonale**
On considère le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)dt$ sur l'ev $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

1. Démontrez que la famille $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $f_p : t \mapsto \cos(pt)$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.
2. Est-ce une famille orthonormale ?

▸ **Exercice 7**. $\star\star$ **Découverte 2 : Matrice orthogonale**
On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ses colonnes forment une bon de $\mathbb{R}^n$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} r & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2z}{\sqrt{6}}) \end{array}$$

Démontrer que la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale.

▸ **Exercice 8**. $\star\star$ **Découverte 1 : Produit scalaire et géométrie**
Dans cet exercice, chaque égalité sera précisément justifiée :

1. **L'identité du parallélogramme :**
   (a) Exprimer $\langle u+v, u+v\rangle$ en fonction des produits scalaires $\langle u,u\rangle, \langle u,v\rangle, \langle v,v\rangle$.
   (b) En déduire une expression de $||u+v||_2^2$ en fonction de $||u||_2^2, \langle u,v\rangle$ et $||v||_2^2$.
   (c) Démontrer l'identité du parallélogramme $||u+v||_2^2 + ||u-v||_2^2 = 2||u||_2^2 + 2||v||_2^2$.
2. **Théorème de Pythagore à 2 vecteurs :**
   (a) Ecrivez le théorème de Pythagore lorsqu'il porte sur une famille de deux vecteurs.
   (b) En utilisant ce que vous avez fait précédemment prouvez-le.
   (c) Ecrivez ce que signifie le théorème de Pythagore appliqué à deux fonctions f et g orthogonales pour le produit scalaire canonique de $C^0([0,1])$.
3. **Théorème de Pythagore à 3 vecteurs :**
   Soient 3 vecteurs u, v, w
   (a) Développez $||u+v+w||_2^2$ en fonction de $||u||_2^2, ||v||_2^2, ||w||_2^2, \langle u,v\rangle, \langle u,w\rangle, \langle v,w\rangle$
   (b) Démontrez le théorème de Pythagore à 3 vecteurs.
4. **Théorème de Pythagore à n vecteurs :**
   Soient n vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$ n vecteurs.
   (a) Développez $||\displaystyle\sum_{i=1}^n u_i||_2^2$.
   (b) Démontrez le théorème de Pythagore à n vecteurs.

▸ **Exercice 9**. $\star\star$ **Découverte 1 : coordonnées**
Soit E un ev euclidien de dimension 2, et (e_1, e_2) une base de cet espace. Tout vecteur u de E s'écrit donc $u = u_1e_1 + u_2e_2$ où u_1 et u_2 sont deux réels.

1. On suppose que (e_1, e_2) est une bon. Exprimez u_1 en fonction de u et e_1. Déterminez aussi l'expression de u_2.
2. On suppose que (e_1, e_2) est orthogonale.
   (a) Exprimez u_1 en fonction de $\langle u, e_1\rangle$ et $||e_1||_2$.
   (b) Déterminez de même l'expression de u_2.

1.2 Problèmes hors aav

▸ **Exercice 10**. ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 1 : orthogonalité et liberté**

On rappelle qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un ev E est libre si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ implique que tous les λ_i sont nuls.

1. Soit (u, v) une famille de deux vecteurs de E. Ecrire la définition de "(u, v) est une famille libre".
2. En déduire qu'une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls est libre.
3. Démontrez que $((1, 2, -1, 1), (3, 2, 3, -4))$ est libre.
4. Démontrez qu'une famille orthogonale de n vecteurs non nuls est libre.

▸ **Exercice 11**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Une ouverture vers la mécanique quantique : produit scalaire hermitien** On appelle produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E une application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle \end{array}$$

qui soit une forme

- sesquilinéaire : (linéaire à gauche et $\forall (u, v, w) \in E^3, \lambda \in \mathbb{C}, \langle u, \lambda v + w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$).
- hermitienne : $\forall (u, v) \in E^2, \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.
- définie : si $\langle u, u\rangle = 0$ alors $u = 0_E$.
- positive : $\forall u \in E, \langle u, u\rangle \geqslant 0$.

1. Soit $E = \mathbb{C}^2$. Démontrer que $\phi \; : \; \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & x\overline{x'} + y\overline{y'} \end{array}$ est un produit scalaire hermitien.
2. Soit $E = \mathbb{C}^n$. Démontrer que $\phi \; : \; \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \end{array}$ est un produit scalaire hermitien.
3. Adaptez le produit scalaire sur $C^0([0, 1])$ de l'exercice 1 pour construire un produit scalaire hermitien et montrez qu'il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.

2 AAV : Comprendre la structure algébrique de l'orthogonal d'un sev

2.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 12**. ⋆ **Classique : Savoir déterminer l'orthogonal d'un sev**

1. Rappeler l'expression du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ ainsi que de la norme euclidienne associée.
2. Après avoir démontré que c'est un sev de $\mathbb{R}^4$, déterminer une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z+t = x - z = 0\}$.
3. La base que vous avez trouvée est-elle orthogonale ? orthonormale ?
4. Déterminer $F^\perp$: autrement dit déterminer les équations vérifiées par tout élément de $F^\perp$.
5. Déterminer une base de $F^\perp$.

▸ **Exercice 13**. ⋆ ⋆ **Classique : Savoir déterminer l'orthogonal d'un sev**
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

1. Rappeler l'expression de ce produit scalaire et démontrer qu'il est bien linéaire à gauche.
2. Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base du sev des matrices diagonales $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
4. Les vecteurs de la base trouvée sont-ils unitaires ? orthogonaux ?
5. Déterminer $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$.

2.2 Problèmes hors aav

▸ **Exercice 14**. ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Supplémentaires orthogonaux matriciels**
On se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad : \quad \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto & \mathrm{tr}({}^tMN) \end{array}.$$

La trace est définie par la somme des éléments diagonaux : pour $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice,

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

La transposée est elle donnée par ${}^tM = [m_{ji}]_{1\leq i,j\leq n}$. On définit l'ensemble des matrices

- symétriques : $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^tM = M\}$.
- antisymétriques : $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^tM = -M\}$.

1. On commence par montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E :
   (a) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sev de E.
   (b) Démontrer que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_E\}$.
   (c) Soit $M \in E$, on suppose que $M = S + A$ où $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Exprimer ${}^tM$ en fonction de S et A. En déduire les expressions de S et A en fonction de M et ${}^tM$.
   (d) En déduire que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E.
2. On démontre maintenant que ces deux ev sont orthogonaux.
   (a) On choisit $n = 2$, démontrer que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
   (b) Pour n quelconque, démontrer que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
   (c) Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$, déduire de la question précédente que $\langle S, A\rangle = 0$.
3. On termine en démontrant qu'effectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire. On rappelle pour cela la formule du coefficient matriciel : pour $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = [n_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices,

$$MN = \left[\sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}\right]_{1\leq i,j\leq n}.$$

   (a) Calculer le coefficient ij de ${}^tMN$.
   (b) En déduire l'expression de $\mathrm{tr}({}^tMN)$.
   (c) Démontrer alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

▸ **Exercice 15**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 1 : Espaces préhilbertiens de fonctions**
Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R}), (f, g) \in E^2, \phi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x) + f'(x)g'(x)dx$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$. Montrer que V et W sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux.

3 AAV : Déterminer la projection orthogonale sur un sev et la distance à un sev

3.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 16**. ⋆ ⋆ **Classique**

1. Construire une bon de $\mathbb{R}^3$ par orthonormalisation de Gram Schmidt à partir de la base
$$((1,0,-1),(2,0,1),(0,1,1)).$$
Vérifiez que la base trouvée est bien une bon !
2. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer une bon associée au produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ sur $\mathbb{R}_3[X]$ après avoir démontré qu'il s'agissait bien d'un produit scalaire.
3. Construire une bon de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle , \rangle : (M,N) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}n_{ij}$ à partir de la base
$$\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)$$
Vérifiez que la base trouvée est bien une bon !

▸ **Exercice 17**. ⋆ **Classique : Le classique**

1. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -2z\}$.
2. En déduire la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F dans la base canonique.
3. Déterminer la distance de $(1,0,0)$ à F.

▸ **Exercice 18**. ⋆ **Classique : Le classique en étant malin**

1. Soit F un sev de E, quelle relation lie, les projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$.
2. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - 2z + t = 0\}$ (Remarquez qu'il est plus judicieux de d'abord déterminer la projection orthogonale sur $F^\perp$).
3. Refaites maintenant le calcul en déterminant une bon de F par orthonormalisation de Gram Schmidt. Vérifiez que la base trouvée est bien une bon !

▸ **Exercice 19**. ⋆ ⋆ **Classique : Le classique sur des matrices**
On reprend le produit scalaire qui y est défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ à l'aide de son expression en bon.
2. Déterminer cette même projection orthogonale en utilisant le fait que $u - p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp}(u) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de $J = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$.

3.2 Problèmes hors aav

▸ **Exercice 20**. ⋆ ⋆ **Découverte 1 : Représentation matricielle des projections orthogonales**

1. **Sur des exemples de $\mathbb{R}^3$:**
   (a) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -2z\}$. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et déterminez la matrice diagonale.
   (b) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$ dans la base canonique. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et déterminez la matrice diagonale.

   (c) Que remarquez-vous au vu des deux premières questions ? Quelles semblent être les valeurs propres d'une projection orthogonale ?

2. **Cas général :** $\star\star\star$ Soit p une projection orthogonale dans un ev euclidien E.
   (a) Démontrez que les espaces propres E_0 et E_1 sont en sont en somme directe.
   (b) Soit $u \in E$, que vaut $p \circ p(u)$? Démontrer que $p(u) \in E_1$ et $u - p(u) \in E_0$.
   (c) En déduire que $E = E_0 + E_1$ puis que E_0 et E_1 sont supplémentaires dans E.
   (d) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de la projection est diagonale avec que des 0 et des 1 sur la diagonale.

▸ **Exercice 21.** $\star\star\star\star$ **Découverte 2 : Polynômes de Laguerre**
On considère l'application $\langle , \rangle$ définie par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt.$$

1. On admet pour commencer que cette intégrale généralisée est bien définie. Montrer que l'application est bien un produit scalaire sur l'espace

$$L^2_{Herm} = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \middle| \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-\frac{t}{2}})^2 dt < +\infty \right\}.$$

2. On détermine maintenant pour quelles fonctions cette intégrale généralisée est bien définie.
   (a) Soient f la fonction constante égale à 1 et $g : t \mapsto t$. Calculer $\langle f, f\rangle$ et $\langle f, g\rangle$.
   (b) Démontrer que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt \right| \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} g(t)^2 e^{-t}dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

   (c) En déduire que le produit scalaire est bien défini sur

$$L^2_{Herm} = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \middle| \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-\frac{t}{2}})^2 dt < +\infty \right\}.$$

3. Construire les 4 premiers vecteurs de la bon obtenue à partir de la base canonique de $R_n[X]$ par orthonormalisation de Gram-Schmidt.

▸ **Exercice 22.** $\star\star\star$ **Découverte 3 : Problème d'optimisation**
Calculer $m = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$ *(Indication : Ecrire m comme la distance d'un vecteur à un certain ev).*

▸ **Exercice 23.** $\star\star\star\star$ **Découverte 1 : Espaces préhilbertiens de fonctions**
Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R}), (f, g) \in E^2, \phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) + f'(x)g'(x)dx$. On a vu dans un exercice précédent que $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$ sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux. Soit $f \in E$. Déterminer la projection orthogonale de f sur V.

▸ **Exercice 24.** $\star\star\star\star$ **Découverte 2 : Les séries de Fourier vues sous l'angle des espaces hermitiens.**
Soit $E = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues et $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit E du produit scalaire hermitien

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

1. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien.
2. Soient $e_n : x \mapsto e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormale de E.
3. Soient g la fonction constante égale à 1 et $h : t \mapsto t$. Calculer les produits scalaires $\langle g, e_n\rangle$ et $\langle h, e_n\rangle$.

4. A quelle notion vue en analyse 2 correspond $\langle f, e_n \rangle$?
5. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction f quelconque sur le sev $Vect(e_n, -N \leq n \leq N)$ de E.
6. A quelle notion vue en analyse 2 correspond cette projection ?
7. Calculer cette projection pour les fonctions g et h.

▸ **Exercice 25**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Problème sur les bon**
Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme associée $\|.\|$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ tels que la propriété (P) suivante soit vérifiée :

$$(P) \ : \ \forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{B}$.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit la matrice symétrique $A = ((e_i|e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **1.1** Soit $x \in F^{\perp}$. Calculer $\|x\|^2$.
1.2 En déduire que E est de dimension finie.

2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \|e_i\| \geq 1$. Montrer qu'alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.
3.1 Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
3.2 Enoncer une identité de polarisation liant produit scalaire et norme associée.
3.3 En utilisant la propriété (P), démontrer que $\forall (x, y) \in E^2, \ (x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$.
3.4 Montrer que l'on a $A^2 = A$.
3.5 Soit a l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le noyau de a.
3.6 En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

▸ **Exercice 26**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Polynômes de Tchébychev**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n.
Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand a_n et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P.
Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.
3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2, c_3.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [-1, 1], \ c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2x c_n(x)$.
5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, \ T_1 = X \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.
6. Prouver que pour tout n, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie II.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.
Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
Calculer $I_{p,p}$.

1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ définie en partie **I** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

1.d. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des réels et $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

2.a. Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que l'on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k T_k$.

2.b. Calculer b_n.

2.c. Montrer que l'on a $\|P\|^2 \geq \dfrac{\pi}{2} b_n^2$.

2.d. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

4 AAV : Manipuler la notion de continuité de fonctions à plusieurs variables

4.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 27**. ⋆ **Classique : Des normes 1**

Soit $||\cdot||_1 : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

Soit l'application définie sur $C^0([a,b])$, $||\cdot||_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)|dt$.

Démontrer que ces applications sont des normes sur des ev que vous préciserez.

▸ **Exercice 28**. ⋆ ⋆ **Classique : Des normes infini**

Soit $||\cdot||_\infty : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup |u_i|$.
Soit l'application définie sur $C^0([a,b])$, $||\cdot||_\infty : f \mapsto \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$,

Démontrer que ces applications sont des normes sur des ev que vous préciserez. Pour l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, vous raisonnerez en démarrant sans les $||\cdot||_\infty$.

▸ **Exercice 29**. ⋆ ⋆ **Classique : Savoir comparer des normes de vecteurs**

Soient les normes suivantes assorties de leur ev :

- Sur $\mathbb{R}^n$: $||u||_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
- Sur $\mathbb{R}^n$: $||u||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$.
- Sur $\mathbb{R}^n$: $||u||_\infty = \max |u_i|$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Démontrez que $||u||_\infty \leq ||u||_1 \leq n||u||_\infty$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Démontrez que $||u||_\infty \leq ||u||_2 \leq \sqrt{n}||u||_\infty$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminez une inégalité reliant $||u||_1$ à $||u||_2$.

▸ **Exercice 30**. ⋆ ⋆ **Classique : Avec des fonctions**

Soient les normes suivantes assorties de leur ev :

- Sur $C^0([a,b])$: $||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$.
- Sur $C^0([a,b])$: $||f||_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$.
- Sur $C^0([a,b])$: $||f||_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.

Soit f dans $C^0([a,b])$

1. Démontrez que $||f||_1 \leq (b-a)||f||_\infty$.
2. Démontrez que $||f||_2 \leq \sqrt{b-a}||f||_\infty$
3. Démontrez que $||f||_1 \leq \sqrt{b-a}||f||_2$.

▸ **Exercice 31**. ⋆ ⋆ **Classique : Savoir étudier la continuité de fonctions à deux variables**

Après avoir expliqué pourquoi ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, étudiez si elles le sont en $(0,0)$:

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{x^4}-e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5 AAV : Manipuler la notion de classe C1 de fonctions à plusieurs variables

5.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 32**. ⋆ ⋆ ⋆ **Classique : Savoir étudier le caractère C^1 de fonctions à deux variables**

1. Démontrez que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Expliquez pourquoi cette fonction est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$.
3. Démontrez que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

6 AAV : Effectuer du calcul différentiel de base sur des fonctions à plusieurs variables

6.1 Exercices de l'aav

▸ **Exercice 33**. ⋆ **Découverte 2 : Fonctions homogènes**
Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, tel que si $((x,y),t) \in U \times \mathbb{R}_+^\star$, alors $(tx,ty) \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α lorsque $\forall((x,y),t) \in U \times \mathbb{R}_+^\star, f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.

1. Démontrer que les fonctions $f : (x,y) \mapsto 2x+y$ et $g : (x,y) \mapsto xy^2$ sont homogènes et déterminer leur degré.
2. Soit f homogène de degré α et de classe $C^1(U)$.
   (a) Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(tx,ty)$.
   (b) En déduire que $x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = \alpha f(x,y)$ pour tout $(x, y \in U)$.
   (c) Démontrer que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont homogènes sur U et déterminez leur degré.

▸ **Exercice 34**. ⋆ ⋆ **Classique : Primitivation** Déterminer toutes les fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = xy^2 \\ \partial_y f(x,y) = yx^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_x f(x,y) = e^x y \\ \partial_y f(x,y) = e^x + 2y \end{cases}$$

▸ **Exercice 35**. ⋆ ⋆ **Découverte 1 :** On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y),$$

Dans tout l'exercice, f désigne une solution de classe C^1 de cette équation.

1. Considérons l'application $\varphi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) \in \mathbb{R}$. Calculer ses dérivées partielles.
2. En déduire que φ vérifie l'équation suivante

$$\partial_u \varphi(u,v) = \frac{1}{2}\varphi(u,v).$$

3. En déduire une expression de $\varphi(u,v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
4. Déterminer enfin les solutions f de l'équation aux dérivées partielles de départ.

▸ **Exercice 36**. ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 1 : L'équation des ondes.** Soit $c > 0$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes (appelées équation des ondes).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0, \qquad \text{en utilisant le changement de variables } \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x+ct. \\ v & = & x-ct. \end{array} \right.$$

Dans tout l'exercice, f désigne une solution de classe C^2 de cette équation.

1. Considérons l'application $\varphi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}) \in \mathbb{R}$. Calculer ses dérivées partielles.
2. Démontrer que pour tout (u,v) dans $\mathbb{R}^2$, $\partial^2_{uv}\varphi(u,v) = 0$.
3. En déduire qu'il existe deux fonctions F et G d'une variable telle que
$$\varphi(u,v) = F(u) + G(v)$$
4. Déterminer alors les solutions $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ de l'edp.
5. Interpréter le nom "équation des ondes".

6.2 Problèmes hors aav

▸ **Exercice 37**. ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Laplacien en coordonnées polaires** On s'intéresse dans cet exercice à l'opérateur Laplacien $\Delta : f \mapsto \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$. L'objectif de cet exercice est de l'écrire en cootdonnées polaires. Pour cela, on considère le changement de coordonnées polaires

$$\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Posons $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

1. Exprimer les dérivées partielles partielles $\partial_r g$ et $\partial_\theta g$ en fonction des dérivées partielles premières de f.
2. En déduire que
$$\partial_x f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta)\partial_r g(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta g(r,\theta)$$
$$\partial_y f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sin(\theta)\partial_r g(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_\theta g(r,\theta)$$
3. Notons $g_1(r,\theta) = \partial_x f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $g_2(r,\theta) = \partial_y f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Déduire de la question 2 que
$$\partial_x^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta)\partial_r g_1(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta g_1(r,\theta)$$
$$\partial_y^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sin(\theta)\partial_r g_2(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\partial_\theta g_2(r,\theta)$$
4. Calculer les dérivées partielles de g_1 et g_2 en fonction de celles de g (premières et secondes).
5. En déduire la valeur de $\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g.

▸ **Exercice 38**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Dériver une intégrale à paramètre dans les bornes** L'objectif de cet exercice est de dériver des intégrales à paramètres

1. Commençons avec un paramètre dans les bornes :
   (a) Rappeler sous quelles hypothèses on peut dériver $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et quelle est sa dérivée.
   (b) Déterminer la dérivée de $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^4} \cos(t)dt$.
2. **Pour les gens qui ont fait analyse 1 :** Vous avez appris à dériver des intégrales à paramètre dans l'intégrande du type $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ par rapport à la variable x. Corsons l'affaire dans le but de dérivée une intégrale à paramètre dans les bornes et dans l'intégrande : $\displaystyle\int_0^x \sin(x+t)dt$.

(a) On considère $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_0^y \sin(x+t)dt \in \mathbb{R}$. Déterminer ses dérivées partielles.

(b) Exprimer $\displaystyle\int_0^x \sin(x+t)dt$ en fonction de φ.

(c) Déduire des deux questions précédentes la dérivée de $\displaystyle\int_0^x \sin(x+t)dt$ par rapport à x.

3. Dérivez par rapport à x, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \sin(x+t)dt$.

7 AAV : Lier détermination des extremas d'une fonction et réduction des endomorphismes symétriques

▸ **Exercice 39**. $\star$ **Classique : Savoir déterminer les extremas d'une fonction.** Déterminer les extremas locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.
3. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$.
4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

▸ **Exercice 40**. $\star$ **Classique : Savoir déterminer les extremas d'une fonction.**
Déterminer les extremas locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$.
2. $f(x,y) = x^2 + y^5$.
3. $f(x,y) = x^4 + (y-2)^4$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$.
5. $f(x,y) = x^2 - 4x + y^3 + 3y^2 + 3y + 5$.

▸ **Exercice 41**. $\star\star$ **Découverte 2 : Extremas et diagonalisation** Dans cet exercice, on étudie deux autres façons de trouver les extremas de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. A chaque fois, l'idée est de réécrire cette fonction comme somme de carrés.

1. La première méthode s'appelle **la réduction de Gauss** : celle-ci consiste à faire disparaître les termes d'ordre 1 en x et y en effectuant une factorisation canonique.
   (a) Démontrer que $x^2 + xy - 3x$ s'écrit sous la forme $(x - h(y))^2 + k(y)$ où h et k sont deux fonctions polynomiales en y, h de degré 1, k de degré 2. Pour cela on utilisera la factorisation canonique suivante (qui est une réécriture d'une identité remarquable) : $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$.
   (b) En déduire que $f(x,y) - f(0,3) = (x - h(y))^2 + p(y)$ où $p(y) = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{4}$.
   (c) Factoriser p.
   (d) Déduire de ce calcul, les extremas de f.
2. La second méthode consiste à utiliser **la diagonalisation des matrices symétriques**.
   (a) Déterminer S matrice symétrique de taille 2×2 de sorte que
   $$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3x - 6y$$
   (b) Diagonaliser S et déterminez en une base de vecteurs propres.
   (c) Vérifiez que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et déduisez-en une bon de vecteurs propres qui constituera votre matrice de passage P.
   (d) Démontrez que l'inverse de P est sa transposée.
   (e) On pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimez $f(x,y)$ uniquement en fonction de X et Y.
   (f) Ecrivez $f(x,y) - f(0,3)$ sous la forme de sommes de carrés en reprenant la méthode de la réduction de Gauss.
   (g) En déduire les extremas de f.

▸ **Exercice 42**. $\star$ **Classique : La pratique**
Expliquer pourquoi toutes ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et donner une bon de diagonalisation.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

▸ **Exercice 43**. ⋆ ⋆ **Découverte 1 : Le ballon de rugby**
L'ellipsoïde possédant une forme de ballon de rugby a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

où a,b,c trois réels strictement positifs.

1. Nous cherchons à démontrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation

$$2x^2+5y^2-2yz+5z^2-4x-8y+8=0$$

   est un ellipsoïde. L'idée pour cela est d'effectuer un changement de base et d'y récrire l'équation. On note dans la suite $f(x,y,z)=2x^2+5y^2-2yz+5z^2-4x-8y+8$.

   (a) Déterminer une matrice 3×3 symétrique $S=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{pmatrix}$ telle que $f(x,y,z)=$ $\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}-4x-8y+8$

   (b) Expliquer pourquoi cette matrice est diagonalisable et déterminez-en une bon de diagonalisation. On notera P la matrice de passage et on notera D la matrice diagonale associée.

   (c) On effectue le changement de base $\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. Démontrer que l'équation $f(x,y,z)=0$ se récrit sous la forme

$$\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2-\xi X-\mu Y-\nu Z=\rho$$

   où $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\mu\nu,\rho$ sont des constantes que vous déterminerez.

   (d) En utilisant la factorisation canonique, démontrez que cette équation se met sous la forme d'équation d'ellipsoïde.

2. On s'intéresse maintenant aux extremas de la fonction f.

   (a) Déterminez-les à l'aide de la question précédente.

   (b) Déterminez-les en utilisant le calcul différentiel.

   (c) Parmi ces deux méthodes, laquelle donne des informations plus fortes ?

7.1 Problèmes hors aav

▸ **Exercice 44**. ⋆ ⋆ **Découverte 1 : Endomorphisme positif et représentation matricielle.**
On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme $\varphi : P\mapsto (2X-1)P'(X)+(X^2-X)P''(X)$ est symétrique.

1. Vérifiez que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.

2. On considère le cas $n=2$:

   (a) Démontrer que φ est bien un endomorphisme.

   (b) Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. La matrice est-elle symétrique ?

   (c) Orthonormalisez la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire considéré.

   (d) Ecrire la matrice de φ dans la base orthonormalisée. La matrice est-elle symétrique ?

3. On considère maintenant $n\in\mathbb{N}^\star$.

   (a) Exprimer $\langle (X^2-X)Q,P''\rangle$ en fonction de produits scalaires impliquant P', Q et Q' à l'aide d'une intégration par parties.

   (b) En déduire que l'endomorphisme φ est symétrique.

   (c) Expliquez les résultats obtenus aux questions 2.b et 2.d.

▸ **Exercice 45.** ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Racine carrée d'une matrice.**
Notons $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres positives. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On cherche à montrer que S admet une racine carrée c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S = M^2$.

1. Commençons par l'exemple :
   (a) Considérons la matrice $S = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (b) Diagonaliser cette matrice et déterminez-en une base de vecteurs propres. On notera D la matrice diagonale associée.
   (c) Démontrer que D admet une racine carrée.
   (d) Démontrer par récurrence sur k que pour toute matrice inversible P, pour toute matrice A,
   $$\forall k \in \mathbb{N}, (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$
   (e) En déduire que S admet une racine carrée et calculer cette racine carrée.
2. Démontrons-le maintenant théoriquement. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En utilisant le théorème spectral et en vous inspirant ce que vous avez fait précédemment, montrer que S admet une racine carrée.

▸ **Exercice 46.** ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Endomorphismes symétriques**
Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant
$$\forall x \in E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$
On dit que deux sev F et G de E sont orthogonaux si
$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

1. Démontrer que $\ker(f)$ et $Im(f)$ sont orthogonaux.
2. En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E.
3. Soient deux espaces propres associés à deux valeurs propres différentes λ et μ, démontrer que ces deux espaces propres sont orthogonaux.

▸ **Exercice 47.** ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Nilpotence et symétrie**
On appelle matrice nilpotente une matrice A telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star, A^p = 0$. On appelle alors indice de nilpotence l'entier p.

1. Démontrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
2. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit λ une valeur propre de A et u un vecteur propre associé. Démontrer par récurrence que k dans $\mathbb{N}^\star$, que u est vecteur propre de A^k associé à la valeur propre λ^k.
   (b) En déduire que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de A.
   (c) Expliquer pourquoi A n'est pas inversible.
   (d) Supposons que A soit diagonalisable : démontrer que A est la matrice nulle.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et commutant avec sa transposée.
   (a) Démontrer que $S = {}^tAA$ est également nilpotente.
   (b) Déduire de ce qui précède que S est la matrice nulle.
   (c) En déduire que $A = 0$.

▸ **Exercice 48.** ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Matrices symétrique positives**
Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on dit que S est positive si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXSX \geq 0$. On dit qu'elle est symétrique définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}, {}^tXSX > 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. On cherche à montrer qu'une matrice est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si

ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Pour cet exercice, on rappelle que si $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = [n_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}.$$

1. Quelle est la taille de la matrice ${}^tXSX$?
2. Démontrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\varphi : (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXSY \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
3. Exemple dans le cas diagonal
   (a) Considérons $D = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, démontrer que D est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Soit Λ une matrice diagonale à valeurs propres positives : démontrer que Λ est dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Quelles conditions doivent vérifier les valeurs propres afin qu'elle soit dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?
4. **La théorie en se ramenant au cas diagonal.** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$
   (a) Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé. Démontrer que $\lambda \geq 0$.
   (b) Démontrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\lambda > 0$.
   (c) A l'aide de la formule du produit matriciel, démontrez que

$$ {}^tXSX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}X_iX_j.$$

   (d) Supposons maintenant que toutes les valeurs propres soient positives. A l'aide du théorème spectral, démontrez que $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
   (e) De même démontrer que si les valeurs propres sont strictement positives alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

▸ **Exercice 49**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 1**
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Soit $u \in E$ unitaire.

1. Montrer que $\lambda_1 \leq \langle f(u), u\rangle \leq \lambda_n$. *On pourra décomposer u dans une base bien choisie.*
2. Montrer que $\langle f(u), u\rangle = \lambda_1 \iff f(u) = \lambda_1 x$.

▸ **Exercice 50**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2** Soit $p \in \mathbb{R}_+^\star$, $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$ et $S = (\dfrac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On veut montrer que la matrice S de l'énoncé a toutes ses valeurs propres positives.

1. Justifier l'existence de S et montrer que S est symétrique.
2. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$.
   (b) Démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du = (p-1)!$
   (c) Montrer que pour $(s,p) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st^{\frac{1}{p}}}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du$ sont convergentes en établissant une relation entre ces deux intégrales à l'aide d'un changement de variable.
   (d) En déduire que pour $(s,p) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st^{\frac{1}{p}}}dt = \frac{p!}{s^p}$.
3. On rappelle qu'une matrice symétrique a ses valeurs propres positives si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXSX \geq 0$.
   (a) Démontrer que ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}X_iX_j$.
   (b) À l'aide de la question 2.d, montrer que S a ses valeurs propres positives.

▸ **Exercice 51**. ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Découverte 2 : Inégalité d'Hadamard**
Notons $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres strictement positives. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on rappelle qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPSP = D = Diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (a) En utilisant le théorème spectral, montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S = {}^tMM$.
   (b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \geqslant 0$.
   (c) Montrer que $\forall i, s_{ii} \geqslant 0$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R}), S = {}^tMM$.
   (b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXSX > 0$.
   (c) Montrer que $\forall i, s_{ii} > 0$.
3. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.
4. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, telle que $\forall i, s_{ii} = 1$.
   (a) Montrer que exp est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $(\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
   (b) Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.
5. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit T la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, t_{ii} = 1/\sqrt{s_{ii}}$ et B définie par $B = TST$.
   (a) Montrer que pour tout vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$: ${}^tXBX > 0$.
   (b) En déduire que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (c) Démontrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et notons $S = {}^tAA$.
   (a) Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.
   (b) En déduire que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2}$.