

TD : Maths Générales 2

Pour chaque savoir aav, on vous propose une liste d'exercices divers pour atteindre l'apprentissage en profondeur :

- **Classique** : Tout est dans le nom.
- **Découverte 1** : exercices liants moins classiques nécessitant l'utilisation des concepts de cours.
- **Découverte 2** : exercices liants moins classiques nécessitant l'utilisation des concepts de cours et éventuellement de nouveaux concepts.
- **Découverte 3** : exercices courts sans indication, ouverts.

Le symbole $\star$ désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté.

1 AAV : Maîtriser l'objet produit scalaire et l'orthogonalité de familles de vecteurs

1.1 Exercices de l'aav

► **Exercice 1. $\star$ Classique : L'exo classique**

Démontrer que les applications suivantes sont des produits scalaires

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y, z), (x', y', z')) & \mapsto xx' + yy' + zz' \end{array} \quad \begin{array}{ll} \psi : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \times C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$



La correction du premier produit scalaire est dans le cours dans le cas n général.

Occupons-nous du produit scalaire fonctionnel :

- Symétrie : Soient $f, g \in C^0([a, b])$ alors

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$$

- Linéarité à gauche : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g, h \in C^0([a, b])$, alors par linéarité de l'intégrale

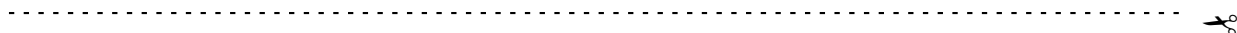
$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))h(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)h(t)dt + \mu \int_a^b g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$$

La symétrie du produit scalaire entraîne alors la linéarité à droite.

- Positivité : Soit $f \in C^0([a, b])$, $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

- Définie : Si $\langle f, f \rangle = 0$ alors $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Comme f^2 est une fonction positive et continue sur $[a, b]$ alors $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$ et donc $f = 0$.

Donc il s'agit bien d'un produit scalaire sur $C^0([a, b])$ qui est un espace préhilbertien.



► **Exercice 2. $\star \star$ Classique : Le classique matriciel**

On se place sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application $\phi : \begin{array}{ll} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto \text{tr}({}^t M N) \end{array}$. On rappelle que tr désigne la somme des éléments diagonaux d'une matrice.

1. Calculer $\phi(M, N)$ en fonction des coefficients M_{ij}, N_{ij} pour i et j dans $\{1, 2\}$ des deux matrices M et N .
2. En déduire que ϕ est un produit scalaire.
3. Expliquez pourquoi si M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}({}^tMM) = 0$ alors $M = 0$.
4. En déduire que si M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que tMM a deux valeurs propres opposées alors $M = 0$.



1. Soient $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix}$.

Alors

$${}^tMN = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}N_{11} + M_{21}N_{21} & M_{11}N_{12} + M_{21}N_{22} \\ M_{12}N_{11} + M_{22}N_{21} & M_{12}N_{12} + M_{22}N_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \phi(M, N) = \text{tr}({}^tMN) = M_{11}N_{11} + M_{21}N_{21} + M_{12}N_{12} + M_{22}N_{22} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_{ij}N_{ij}.$$

2. Faisons le pour n général (c'est la même démonstration que pour $n = 2$).

• Symétrie : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\langle M, N \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}N_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{ij}M_{ij} = \langle N, M \rangle$$

• Linéarité à gauche : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\langle \lambda M + \mu N, P \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda M_{ij} + \mu N_{ij})P_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda M_{ij}P_{ij} + \mu N_{ij}P_{ij}) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}P_{ij} + \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{ij}P_{ij}$$

donc

$$\langle \lambda M + \mu N, P \rangle = \lambda \langle M, P \rangle + \mu \langle N, P \rangle$$

La symétrie du produit scalaire entraîne alors la linéarité à droite.

• Positivité : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle M, M \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2 \geq 0$.

• Définie : Si $\langle M, M \rangle = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2 = 0$. Comme on somme des quantités positives, alors pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$, $M_{ij} = 0$ et donc $M = 0$.

Donc il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui étant de dimension finie est donc un espace euclidien.

3. On sait que par définition $\phi(M, M) = \text{tr}({}^tMM)$. Si cette quantité est nulle, sachant que ϕ est un produit scalaire, alors $M = 0$ par l'axiome "défini".
4. On sait que la trace est la somme des valeurs propres, donc si tMM a deux valeurs propres opposées alors tMM la trace est nulle.
D'après la question précédente alors $M = 0$.



► Exercice 3. ★ Classique : Manipuler la norme euclidienne

1. **Visualiser différentes normes euclidiennes** : Reprendre les produits scalaires des exercices 1 et 2 et écrire l'expression de leurs normes euclidiennes $\|(x, y, z)\|_2, \|f\|_2, \|M\|_2$. Calculer alors ces normes pour $(x, y, z) = (1, 2, 3), f_1 : t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}, f_2 : t \mapsto \cos(t)$
2. **Manipuler la norme de l'exo 1 sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$** : Soient $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$, démontrer les propriétés d'homogénéité ($\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$), de définition (si $\|f\|_2 = 0$ alors f est nulle) de la norme euclidienne sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
3. **Le cas général** : Soit E un ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Démontrer que la norme euclidienne associée est bien définie, positive et homogène en ne vous servant que des axiomes du produit scalaire.



- 1.
- 2.
3. Dans toute la suite u, v désignent des vecteurs de E , λ un réel :

• **Positivité** : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est positif par positivité du produit scalaire.

• **Homogénéité** :

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda \langle u, \lambda u \rangle} \quad \text{par linéarité à gauche} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} \quad \text{par linéarité à droite} \\ &= |\lambda| \|u\| \end{aligned}$$

• **Caractère défini** : Si $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0$ alors $u = 0$ car le produit scalaire est défini.

• **Inégalité triangulaire** : c'est fait dans le cours ! C'est la partie la plus dure.

----- ✂

► **Exercice 4. ★ ★ ★ Découverte 1 : Des produit scalaire plus futés**

1. On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour quels entiers naturels n , l'application

$$\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \in \mathbb{R}$$

est-elle un produit scalaire ?

2. On se place sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Soient f, g deux fonctions de E . On définit φ par

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E .

✂ -----

1. Je vous laisse démontrer le caractère bilinéaire, symétrique, positif en vous inspirant du cours. Le point plus sensible est le caractère défini qui aboutit à une condition sur n :

Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Le polynôme P a donc trois racines distinctes.

• Si $n \leq 2$, le degré de P est inférieur ou égal à 2 et comme il admet strictement plus de 2 racines, $P = 0$. Dans ce cas, φ est une forme définie.

• Si $n \geq 3$, $X(X-1)(X-2)$ est un polynôme non nul qui s'annule en 0, 1 et 2. Dans ce cas, φ n'est pas une forme définie.

Donc φ est un produit scalaire si et seulement si $n \leq 2$.

----- ✂

► **Exercice 5. ★ Classique : Savoir montrer qu'une famille est orthogonale**

Démontrer si les familles suivantes sont orthogonales, orthonormales

1. $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1))$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✂ -----

Il s'agit comme d'habitude de faire le produit scalaire des vecteurs 2 à 2 et de regarder s'il vaut 0. Il faut aussi regarder si les normes euclidiennes valent 1.

----- ✂

► **Exercice 6. ★ Classique : Savoir montrer qu'une famille est orthogonale**

On considère le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$ sur l'espace $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$.

1. Démontrez que la famille $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $f_p : t \mapsto \cos(pt)$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.
2. Est-ce une famille orthonormale?



1. Soient $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q$, il s'agit de montrer que $\langle f_p, f_q \rangle = 0$.

Or

$$\langle f_p, f_q \rangle = \int_0^\pi \cos(pt) \cos(qt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t)) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)t)}{p-q} \right]_0^\pi = 0.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\|f_p\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(pt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2pt)) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin(2pt)}{2p} \right]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$

Donc ce n'est pas une famille orthonormale sinon la norme au carré vaudrait 1.



► **Exercice 7. ★ ★ Découverte 2 : Matrice orthogonale**

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$. On considère l'application suivante :

$$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2z}{\sqrt{6}} \right)$$

Démontrer que la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale.



On a

$$r(e_1) = r(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$$

$$r(e_2) = r(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + 0e_3$$

$$r(e_3) = r(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}e_3$$

Donc la matrice en base canonique est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On vérifie que les colonnes sont orthogonales 2 à 2 et que leur norme vaut 1 (à vous de le faire). C'est alors une famille orthonormale. Reste à montrer qu'il s'agit d'une base.

Cette famille est orthonormale donc elle est libre d'après le cours (famille orthogonale de vecteurs non nuls). Elle contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.



► **Exercice 8. ★ ★ Découverte 1 : Produit scalaire et géométrie**

Dans cet exercice, chaque égalité sera précisément justifiée :

1. **L'identité du parallélogramme :**

- (a) Exprimer $\langle u + v, u + v \rangle$ en fonction des produits scalaires $\langle u, u \rangle, \langle u, v \rangle, \langle v, v \rangle$.
- (b) En déduire une expression de $\|u + v\|_2^2$ en fonction de $\|u\|_2^2, \langle u, v \rangle$ et $\|v\|_2^2$.
- (c) Démontrer l'identité du parallélogramme $\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2$.

2. Théorème de Pythagore à 2 vecteurs :

- Ecrivez le théorème de Pythagore lorsqu'il porte sur une famille de deux vecteurs.
- En utilisant ce que vous avez fait précédemment prouvez-le.
- Ecrivez ce que signifie le théorème de Pythagore appliqué à deux fonctions f et g orthogonales pour le produit scalaire canonique de $C^0([0, 1])$.

3. Théorème de Pythagore à 3 vecteurs :

Soient 3 vecteurs u, v, w

- Développez $\|u + v + w\|_2^2$ en fonction de $\|u\|_2^2, \|v\|_2^2, \|w\|_2^2, \langle u, v \rangle, \langle u, w \rangle, \langle v, w \rangle$
- Démontrez le théorème de Pythagore à 3 vecteurs.

4. Théorème de Pythagore à n vecteurs :

Soient n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ n vecteurs.

- Développez $\|\sum_{i=1}^n u_i\|_2^2$.
- Démontrez le théorème de Pythagore à n vecteurs.



- Par linéarité à gauche,

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle.$$

Donc par linéarité à droite,

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Donc par symétrie du produit scalaire,

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

- Donc

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

De même

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

- On en déduit la question en sommant et en soustrayant les deux égalités de la question précédente.
- Soit E un ev préhilbertien, si (u, v) est orthogonale alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
 - On a vu que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$. Comme (u, v) est orthogonale alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
 - Si (f, g) est une famille orthogonale, alors le théorème de Pythagore assure que $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ et donc que

$$\int_0^1 (f(t) + g(t))^2 dt = \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 g(t)^2 dt$$

ce qui en général est faux.

-

$$\begin{aligned} \|u + v + w\|_2^2 &= \langle u + v + w, u + v + w \rangle \\ &= \langle u, u + v + w \rangle + \langle v, u + v + w \rangle + \langle w, u + v + w \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + 2\langle u, w \rangle + \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|u\|_2^2 + 2\langle u, v \rangle + 2\langle u, w \rangle + \|v\|_2^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|_2^2 \end{aligned}$$

par définition de $\| \cdot \|_2$
par linéarité à gauche
par linéarité à droite
par symétrie du produit s
par définition de $\| \cdot \|_2$

- Si (u, v, w) est orthogonale, alors $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle = 0$ donc on a bien

$$\|u + v + w\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2$$

- La démonstration est faite dans le cours.



► **Exercice 9. ★ ★ Découverte 1 : coordonnées**

Soit E un ev euclidien de dimension 2, et (e_1, e_2) une base de cet espace. Tout vecteur u de E s'écrit donc $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ où u_1 et u_2 sont deux réels.

1. On suppose que (e_1, e_2) est une bon. Exprimez u_1 en fonction de u et e_1 . Déterminez aussi l'expression de u_2 .
2. On suppose que (e_1, e_2) est orthogonale.
 - (a) Exprimez u_1 en fonction de $\langle u, e_1 \rangle$ et $\|e_1\|_2$.
 - (b) Déterminez de même l'expression de u_2 .



1. On sait que $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$. Alors

$$\begin{aligned} \langle u, e_1 \rangle &= \langle u_1 e_1 + u_2 e_2, e_1 \rangle \\ &= u_1 \langle e_1, e_1 \rangle + u_2 \langle e_2, e_1 \rangle && \text{par linéarité à gauche} \\ &= u_1 \|e_1\|^2 + u_2 \langle e_2, e_1 \rangle \\ &= u_1 && \text{par définition d'une bon.} \end{aligned} \quad (1)$$

Donc $u_1 = \langle u, e_1 \rangle$. De même $u_2 = \langle u, e_2 \rangle$.

2. (a) On reprend le même raisonnement qu'à la question 1 :

$$\begin{aligned} \langle u, e_1 \rangle &= \langle u_1 e_1 + u_2 e_2, e_1 \rangle \\ &= u_1 \langle e_1, e_1 \rangle + u_2 \langle e_2, e_1 \rangle && \text{par linéarité à gauche} \\ &= u_1 \|e_1\|^2 + u_2 \langle e_2, e_1 \rangle \\ &= u_1 \|e_1\|^2 && \text{par définition d'une famille orthogonale.} \end{aligned} \quad (2)$$

Donc $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|^2} \langle u, e_1 \rangle$. Il y a une erreur d'énoncé e_1 n'est pas unitaire.

(b) Le même raisonnement en partant de $\langle u, e_2 \rangle$ donne $u_2 = \frac{1}{\|e_2\|^2} \langle u, e_2 \rangle$



1.2 Problèmes hors aav

► **Exercice 10. ★ ★ ★ Découverte 1 : orthogonalité et liberté**

On rappelle qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ d'un ev E est libre si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$ implique que tous les λ_i sont nuls.

1. Soit (u, v) une famille de deux vecteurs de E . Ecrire la définition de " (u, v) est une famille libre".
2. En déduire qu'une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls est libre.
3. Démontrez que $((1, 2, -1, 1), (3, 2, 3, -4))$ est libre.
4. Démontrez qu'une famille orthogonale de n vecteurs non nuls est libre.



1. Définition : soient λ, μ deux réels, si $\lambda u + \mu v = 0_E$ alors $\lambda = \mu = 0$.
2. Soit (u, v) une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls. Soient λ, μ deux réels, tels que $\lambda u + \mu v = 0_E$.

Ce qu'on sait : $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$.

Ce qu'on veut : $\lambda = \mu = 0$.

Comme $\lambda u + \mu v = 0_E$ alors prenons le produit scalaire par u de cette égalité :

$$\langle u, \lambda u + \mu v \rangle = 0.$$

Par linéarité à droite : $\lambda \langle u, u \rangle + \mu \langle u, v \rangle = 0$.

Comme $\langle u, v \rangle = 0$ alors l'égalité précédente devient $\lambda \langle u, u \rangle = 0$.

Comme le produit scalaire est une forme définie et que $u \neq 0_E$ alors $\langle u, u \rangle \neq 0$ (sinon l'axiome donnerait que $u = 0_E$).

Donc $\lambda = 0$.

Faites de même en prenant le produit scalaire par v pour obtenir $\mu = 0$.

Donc (u, v) est libre.

3. Ces deux vecteurs sont non nuls et cette famille est orthogonale puisque le produit scalaire des deux vecteurs vaut 0. La question précédente assure que cette famille est libre.
4. La démonstration est réalisée dans le cours.

----- ✂

► **Exercice 11. ★ ★ ★ ★ Découverte 2 : Une ouverture vers la mécanique quantique : produit scalaire hermitien** On appelle produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E une application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

qui soit une forme

- sesquilinéaire : (linéaire à gauche et $\forall (u, v, w) \in E^3, \lambda \in \mathbb{C}, \langle u, \lambda v + w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$).
- hermitienne : $\forall (u, v) \in E^2, \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
- définie : si $\langle u, u \rangle = 0$ alors $u = 0_E$.
- positive : $\forall u \in E, \langle u, u \rangle \geq 0$.

1. Soit $E = \mathbb{C}^2$. Démontrer que $\phi : \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & x\bar{x}' + y\bar{y}' \end{array}$ est un produit scalaire hermitien.

2. Soit $E = \mathbb{C}^n$. Démontrer que $\phi : \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i \end{array}$ est un produit scalaire hermitien.

3. Adaptez le produit scalaire sur $C^0([0, 1])$ de l'exercice 1 pour construire un produit scalaire hermitien et montrez qu'il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.

✂ ----- ✂

2 AAV : Comprendre la structure algébrique de l'orthogonal d'un sev

2.1 Exercices de l'aav

► **Exercice 12. ★ Classique : Savoir déterminer l'orthogonal d'un sev**

1. Rappeler l'expression du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ ainsi que de la norme euclidienne associée.
2. Après avoir démontré que c'est un sev de $\mathbb{R}^4$, déterminer une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = x - z = 0\}$.
3. La base que vous avez trouvée est-elle orthogonale ? orthonormale ?
4. Déterminer $F^\perp$: autrement dit déterminer les équations vérifiées par tout élément de $F^\perp$.
5. Déterminer une base de $F^\perp$.

✂ -----

- 1.

2. Pour le sev, je le laisse en exo, ça doit être maîtrisé maintenant :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} y=-2z-t \\ x=z \end{cases}$$

Donc $(x, y, z, t) \in F \iff (x, y, z, t) = (z, -2z - t, z, t) = z(1, -2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$.

Notons $\epsilon_1 = (1, -2, 1, 0), \epsilon_2 = (0, -1, 0, 1)$. La famille (ϵ_1, ϵ_2) est génératrice de F d'après ce qui précède. Elle est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc (ϵ_1, ϵ_2) est une base de F .

3.

4. On en déduit que $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à (ϵ_1, ϵ_2) :

$$F^\perp = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle u, \epsilon_1 \rangle = 0, \langle u, \epsilon_2 \rangle = 0\} = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0, -y + t = 0\}.$$

5. Cette question consiste à refaire à $F^\perp$ ce qu'on a fait à F à la question 1.

----- ✂

► Exercice 13. ★ ★ Classique : Savoir déterminer l'orthogonal d'un sev

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

- Rappeler l'expression de ce produit scalaire et démontrer qu'il est bien linéaire à gauche.
- Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base du sev des matrices diagonales $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
- Les vecteurs de la base trouvée sont-ils unitaires ? orthogonaux ?
- Déterminer $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$.

----- ✂

1.

2. A vous de jouer.

3. Toute matrice diagonale s'écrit en fonction des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui forment donc une famille génératrice de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. C'est une famille libre car ces deux matrices ne sont clairement pas multiples l'une de l'autre. Il s'agit donc d'une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 2.

4.

5. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ si et seulement si elle est orthogonale aux deux matrices de la base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Donc une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ si et seulement si $a = d = 0$. Donc $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.

----- ✂

2.2 Problèmes hors aav

► Exercice 14. ★ ★ ★ Découverte 2 : Supplémentaires orthogonaux matriciels

On se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto & \text{tr}({}^t M N) \end{array}$$

La trace est définie par la somme des éléments diagonaux : pour $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice,

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}.$$

La transposée est elle donnée par ${}^t M = [m_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n}$. On définit l'ensemble des matrices

- symétriques : $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$.
 - antisymétriques : $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$.
1. On commence par montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E :
 - (a) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sev de E .
 - (b) Démontrer que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_E\}$.
 - (c) Soit $M \in E$, on suppose que $M = S + A$ où $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Exprimer tM en fonction de S et A . En déduire les expressions de S et A en fonction de M et tM .
 - (d) En déduire que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E .
 2. On démontre maintenant que ces deux ev sont orthogonaux.
 - (a) On choisit $n = 2$, démontrer que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
 - (b) Pour n quelconque, démontrer que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
 - (c) Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$, déduire de la question précédente que $\langle S, A \rangle = 0$.
 3. On termine en démontrant qu'effectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire. On rappelle pour cela la formule du coefficient matriciel : pour $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ et $N = [n_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices,

$$MN = \left[\sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj} \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

- (a) Calculer le coefficient ij de tMN .
- (b) En déduire l'expression de $\text{tr}({}^tMN)$.
- (c) Démontrer alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .



1.
 - (a) A vous de maîtriser : n'oubliez pas que l'application transposée est linéaire.
 - (b) $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \supset \{0_E\}$ car ces deux espaces sont des sev donc doivent contenir l'élément neutre.

Démontrons que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \subset \{0_E\}$.

But : Montrer que si $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice nulle.

Soit donc $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ alors par définition ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. Donc $M = -M$ ce qui implique $2M = 0_E$ et donc $M = 0_E$.

Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_E\}$.

- (c) Si $M = S + A$ alors

$$\begin{aligned} {}^tM &= {}^t(S + A) \\ &= {}^tS + {}^tA && \text{car la transposée est linéaire} \\ &= S - A && \text{car S est symétrique et A antisymétrique} \end{aligned}$$

Comme $M = S + A$ et ${}^tM = S - A$. Alors $M + {}^tM = 2S$ et $M - {}^tM = 2A$.

$$\text{Donc } S = \frac{M + {}^tM}{2} \text{ et } A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

- (d) La question précédente démontre que toute matrice se décompose comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique. Ceci démontre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. Ayant montré que ces deux sev sont d'intersection nulle, ils sont donc supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2.
 - (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dans les deux cas la trace vaut $a + d$.
 - (b) Soit $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors par définition ${}^tM = [m_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n}$. Dans les deux cas, les éléments diagonaux sont les M_{ii} pour i dans $\{1, \dots, n\}$ et la trace vaut $\sum_{i=1}^n M_{ii}$.
 - (c)

$$\begin{aligned} \langle S, A \rangle &= \text{tr}({}^tSA) \\ &= \text{tr}(SA) && \text{S étant symétrique} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \langle S, A \rangle &= \text{tr}({}^tSA) \\
 &= \text{tr}({}^t({}^tSA)) && \text{car la trace d'une matrice est égale à celle de sa transposée} \\
 &= \text{tr}({}^tA({}^tS)) && \text{car } {}^t(MN) = {}^tN{}^tM \\
 &= \text{tr}({}^tAS) \\
 &= \text{tr}(-AS) && A \text{ étant antisymétrique} \\
 &= -\text{tr}(AS) && \text{car la trace est linéaire} \\
 &= -\text{tr}(SA)
 \end{aligned}$$

----- ✂

► **Exercice 15. ★ ★ ★ Découverte 1 : Espaces préhilbertiens de fonctions**

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $(f, g) \in E^2$, $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) + f'(x)g'(x)dx$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
2. Soit $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$. Montrer que V et W sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux.

✂ -----

1. Cette question a déjà été traitée en td.
2. Commençons par montrer qu'ils sont supplémentaires (notez que si on montre que les sev sont orthogonaux alors l'intersection réduite au neutre mais faire la démo de l'intersection est quand même intéressant pour bien comprendre).

On veut montrer que l'intersection $V \cap W$ est réduite au neutre et que $E = V + W$. L'ev V étant de dimension infinie, il est illusoire de l'utiliser ici même si W est de dimension 2.

- Intersection : Soit $f \in V \cap W$ alors $f'' = f$ et $f(0) = f(1) = 0$.

L'équation différentielle $f'' - f$ a pour équation caractéristique $r^2 = 1$ et donc comme solutions

$$f : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Or comme $f(0) = f(1) = 0$ alors $A + B = 0$ et $Ae + Be^{-1} = 0$. Ce système linéaire de deux équations donne $A = B = 0$. Donc f est la fonction nulle.

- $E = V + W$: L'inclusion $E \supset V + W$ est évidente puisque $V \subset E$ et $W \subset E$.

L'autre inclusion l'est moins : soit $f \in E$, le but est de trouver $g \in V$ et $h \in W$ telles que $f = g + h$. Essayons de déterminer g et h .

Comme h doit appartenir à W alors il doit exister $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall t \in [0, 1], \quad h(t) = Ae^t + Be^{-t}.$$

On veut donc trouver g , A et B telles que

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) = g(t) + Ae^t + Be^{-t}$$

Or on veut que $g \in V$ cad que $g(0) = g(1) = 0$. Ainsi on veut que A et B vérifient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} f(0) = A + B \\ f(1) = Ae + Be^{-1} \end{cases}$$

On en déduit que $A = \frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e}$ et $B = -\frac{f(0)e - f(1)}{e^{-1} - e}$. Donc

$$h : t \mapsto \frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e}e^t - \frac{f(0)e - f(1)}{e^{-1} - e}e^{-t}$$

et

$$g : t \mapsto f(t) - \left(\frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e}e^t - \frac{f(0)e - f(1)}{e^{-1} - e}e^{-t} \right)$$

conviennent.

Donc V et W sont supplémentaires dans E .

• Orthogonalité : On veut montrer que $\forall g \in V, \forall h \in W, \varphi(g, h) = 0$.

Soient $g \in V, h \in W$,

$$\begin{aligned}
 \phi(g, h) &= \int_0^1 g(x)h(x) + g'(x)h'(x)dx \\
 &= \int_0^1 g(x)h(x)dx + \int_0^1 g'(x)h'(x)dx && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \int_0^1 g(x)h(x)dx + [h'(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 g(x)h''(x)dx && \text{par IPP sachant que h est de classe } C^2 \\
 &= \int_0^1 g(x)h(x)dx - \int_0^1 g(x)h''(x)dx && \text{car } g(0)=g(1)=0 \text{ puisque } g \in V \\
 &= \int_0^1 g(x)h(x)dx - \int_0^1 g(x)h(x)dx && \text{car } h''=h \text{ puisque } h \in W \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Donc V et W sont orthogonaux.



3 AAV : Déterminer la projection orthogonale sur un sev et la distance à un sev

3.1 Exercices de l'aav

► Exercice 16. ★ ★ Classique

1. Construire une bon de $\mathbb{R}^3$ par orthonormalisation de Gram Schmidt à partir de la base

$$((1, 0, -1), (2, 0, 1), (0, 1, 1)).$$

Vérifiez que la base trouvée est bien une bon!

2. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer une bon associée au produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ sur $\mathbb{R}_3[X]$ après avoir démontré qu'il s'agissait bien d'un produit scalaire.

3. Construire une bon de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle, \rangle : (M, N) \mapsto \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_{ij}n_{ij}$ à partir de la base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Vérifiez que la base trouvée est bien une bon!



1. Notons (e_1, e_2, e_3) la famille de vecteurs dans le même ordre.

$$\bullet \epsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

$$\bullet f_2 = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 = (2, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{2}(3, 0, 3).$$

$$\bullet \epsilon_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(3, 0, 3) = \frac{1}{2}(1, 0, 1).$$

$$\bullet f_3 = e_3 - \langle e_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle e_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 = (0, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (0, 1, 0).$$

$$\bullet \epsilon_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = (0, 1, 0).$$

La famille $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une bon de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la famille de vecteurs dans le même ordre.

$$\bullet \epsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \|e_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 dt} = \sqrt{2}.$$

$$\bullet f_2 = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 = X - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = X.$$

$$\bullet \epsilon_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{X}{\sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt}} = \frac{\sqrt{3}X}{\sqrt{2}}.$$

$$\bullet f_3 = e_3 - \langle e_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle e_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 = X^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt - 0 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Le terme $\langle e_3, \epsilon_2 \rangle$ s'annule puisque il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

$$\bullet \epsilon_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{X^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}) dt}} = \frac{X^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}} = \frac{X^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}} = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$

$$\bullet f_4 = e_4 - \langle e_4, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle e_4, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 - \langle e_4, \epsilon_3 \rangle \epsilon_3 = e_4 - \langle e_4, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 = X^3 - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t^4 dt X = X^3 - \frac{3}{5}X.$$

$$\bullet \epsilon_4 = \frac{f_4}{\|f_4\|} = \frac{X^3 - \frac{3}{5}X}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2) dt}} = \frac{X^3 - \frac{3}{5}X}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2) dt}} = \frac{X^3 - \frac{3}{5}X}{\sqrt{\frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25}}} = \sqrt{\frac{7}{8}}(5X^3 - 3X).$$

La famille $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est une bon de $\mathbb{R}_3[X]$.

----- ✂

► Exercice 17. ★ Classique : Le classique

- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -2z\}$.
- En déduire la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F dans la base canonique.
- Déterminer la distance de $(1, 0, 0)$ à F .

✂ -----

- On commence par déterminer une base de F . On sait que tout vecteur de F s'écrit

$$(x, y, z) = (-2z, -2z, z) = z(-2, -2, 1).$$

Donc $(-2, -2, 1)$ est génératrice de F . S'agissant d'un vecteur non nul, c'est une famille libre donc une base de F .

$$\text{On en déduit qu'une bon de } F \text{ est } e_1 = \frac{1}{\|(-2, -2, 1)\|_2} (-2, -2, 1) = \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$

Enfin F étant de dimension 1, sa projection orthogonale est donnée par

$$p_F(x, y, z) = \langle (x, y, z), e_1 \rangle e_1 = \frac{-2x - 2y + z}{9}(-2, -2, 1).$$

- La matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F dans la base canonique a pour colonnes l'expression de $p_F(e_1), p_F(e_2), p_F(e_3)$ dans la base e_1, e_2, e_3 .

Il s'agit donc de calculer à partir de la formule de la question 1, $p_F(1, 0, 0)$ pour la première colonne, $p_F(0, 1, 0)$ pour la seconde colonne, $p_F(0, 0, 1)$ pour la troisième colonne. Vous obtenez :

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- La distance

$$\begin{aligned} d((1, 0, 0), F) &= \|(1, 0, 0) - p_F(1, 0, 0)\|_2 \\ &= \|(1, 0, 0) - \frac{1}{9}(4, 4, -2)\|_2 \\ &= \left\| \left(\frac{5}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9} \right) \right\|_2 \\ &= \frac{1}{9} \|(5, -4, -2)\|_2 && \text{par homogénéité de la norme} \\ &= \frac{\sqrt{45}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

----- ✂

► **Exercice 18. ★ Classique : Le classique en étant malin**

1. Soit F un sev de E , quelle relation lie, les projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$.
2. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - 2z + t = 0\}$ (Remarquez qu'il est plus judicieux de d'abord déterminer la projection orthogonale sur $F^\perp$).
3. Refaites maintenant le calcul en déterminant une bon de F par orthonormalisation de Gram Schmidt. Vérifiez que la base trouvée est bien une bon !



1. On sait que $p_F + p_{F^\perp} = id_E$. Autrement dit

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x.$$

2. Cet espace va être de dimension 3. Il est plus judicieux de considérer son orthogonal qui est de dimension $4 - 3 = 1$ puisque F et son orthogonal sont supplémentaires.

On remarque que

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - 2z + t = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \langle (x, y, z, t), (1, 1, -2, 1) \rangle = 0\} = Vect(1, 1, -2, 1)^\perp.$$

Comme $Vect(1, 1, -2, 1)^\perp$ est de dimension finie alors $F^\perp = (Vect(1, 1, -2, 1)^\perp)^\perp = Vect(1, 1, -2, 1)$.

Donc une base de $F^\perp$ est $(1, 1, -2, 1)$ (génératrice par définition et libre car c'est un vecteur non nul).

Donc une bon de $F^\perp$ est donnée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -2, 1)$.

Ainsi

$$p_{F^\perp}(x, y, z, t) = \langle (x, y, z, t), e_1 \rangle e_1 = \frac{x + y - 2z + t}{7}(1, 1, -2, 1).$$

et

$$p_F(x, y, z, t) = (x, y, z, t) - p_{F^\perp}(x, y, z, t) = \left(\frac{6x - y + 2z - t}{7}, \frac{-x + 6y + 2z - t}{7}, \frac{2x + 2y + 3z + 2t}{7}, \frac{-x - y + 2z + 6t}{7} \right).$$

- 3.

----- ✂

► **Exercice 19. ★ ★ Classique : Le classique sur des matrices**

On reprend le produit scalaire qui y est défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ à l'aide de son expression en bon.
2. Déterminer cette même projection orthogonale en utilisant le fait que $u - p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp}(u) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$.



1. On rappelle que toute matrice de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où b et c sont deux réels (voir exercice 13). Ainsi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$. Mieux vous pouvez vérifier que c'est déjà une bon pour le produit scalaire de l'exercice 13 (donc pas besoin d'orthonormaliser).

Donc d'après le cours

$$p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est demandé il suffit de remplacer pour $b = c = 1$.

2. • On a une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Je fais la démo pour une matrice quelconque mais il suffit de la faire pour $a = b = c = d = 1$ au vu de la question. La projection sur $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ peut donc se décomposer dans cette base :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists! (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Or $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b - \lambda_1 \\ c - \lambda_2 & d \end{pmatrix}$ est un élément de $(\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp)^\perp$ donc il est orthogonal aux deux vecteurs de la base précédente :

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b - \lambda_1 \\ c - \lambda_2 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \left\langle \begin{pmatrix} a & b - \lambda_1 \\ c - \lambda_2 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Ceci donne $b = \lambda_1$ et $c = \lambda_2$ et donc

$$p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

3. Travaillant dans un ev euclidien, nous savons que $d(J, \mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp)$ est donnée par $\|J - p_{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^\perp}(J)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2}$.



3.2 Problèmes hors aav

► Exercice 20. ★ ★ Découverte 1 : Représentation matricielle des projections orthogonales

1. Sur des exemples de $\mathbb{R}^3$:

- Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -2z\}$. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et déterminez la matrice diagonale.
- Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$ dans la base canonique. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et déterminez la matrice diagonale.
- Que remarquez-vous au vu des deux premières questions? Quelles semblent être les valeurs propres d'une projection orthogonale?

2. Cas général : ★ ★ ★ Soit p une projection orthogonale dans un ev euclidien E .

- Démontrez que les espaces propres E_0 et E_1 sont en somme directe.
- Soit $u \in E$, que vaut $p \circ p(u)$? Démontrer que $p(u) \in E_1$ et $u - p(u) \in E_0$.
- En déduire que $E = E_0 + E_1$ puis que E_0 et E_1 sont supplémentaires dans E .
- Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de la projection est diagonale avec que des 0 et des 1 sur la diagonale.



- (a) La matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F dans la base canonique a pour colonnes l'expression de $p_F(e_1), p_F(e_2), p_F(e_3)$ dans la base e_1, e_2, e_3 .
Il s'agit donc de calculer à partir de la formule de la question 1, $p_F(1, 0, 0)$ pour la première colonne, $p_F(0, 1, 0)$ pour la seconde colonne, $p_F(0, 0, 1)$ pour la troisième colonne. Vous obtenez :

$$P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, 2)$ sont des éléments de $E_0 = \ker(P)$: on en déduit que 0 est valeur propre au moins double puisque $\dim E_0 \leq \text{mult}(0)$ et qu'on a trouvé une famille libre de deux vecteurs de E_0 .

Par ailleurs la trace de la matrice est 1 donc la troisième valeur propre est 1 puisque la trace est la somme des valeurs propres. 0 est donc valeur propre double et 1 est valeur propre simple. Donc $\dim E_0 \leq \text{mult}(0) = 2$ et donc $\dim(E_0) = 2$ (puisque $((1, -1, 0), (1, 0, 2))$ est une famille libre de vecteurs propres associée à 0).

Par ailleurs, on a $1 \leq \dim(E_1) \leq \text{mult}(1) = 1$. Donc $\dim(E_1) = 1$.

Donc P est diagonalisable et la matrice diagonale associée est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (b) On sait que $\text{id}_E = p_F + p_{F^\perp}$ donc on en déduit que matriciellement, étant donné une base B quelconque $I_3 = \text{Mat}_B(p_F) + \text{Mat}_B(p_{F^\perp})$. En particulier dans la base canonique, la matrice est donnée par $I_3 - P$ (je vous laisse la calculer).

Dans la base de diagonalisation de P , la matrice est donnée par $I_3 - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice

est diagonale ce qui montre bien que $p_{F^\perp}$ est diagonalisable.

- (c) A chaque fois, les valeurs propres sont 0 et 1. Il y a un nombre de 1 égal à la dimension de l'espace sur lequel on projette.

2. (a) Il s'agit de montrer que $E_0 \cap E_1 = \{0_E\}$.

L'inclusion de droite à gauche est évidente E_0 et E_1 étant deux sev de E .

Montrons maintenant que $E_0 \cap E_1 \subset \{0_E\}$:

Soit $u \in E_0 \cap E_1$ alors $p(u) = 0_E$ et $p(u) = u$. Donc $u = 0_E$.

Donc $E_0 \cap E_1 = \{0_E\}$.

- (b) Notons F le sev sur lequel on projette orthogonalement. Alors $\forall u \in E, p(u) \in F$. On en déduit que $p(p(u)) = p(u)$ puisque le vecteur $p(u)$ est déjà dans F . Donc $p \circ p(u) = p(u)$.

Soit $v = p(u)$. On veut mq $p(u) \in E_1$ cad que $p(v) = v$.

Or

$$\begin{aligned} p(v) &= p(p(u)) \\ &= p(u) && \text{d'après la question précédente.} \\ &= v \end{aligned}$$

On veut aussi montrer que $u - v \in E_0$ cad que $p(u - v) = 0_E$.

Or Or

$$\begin{aligned} p(u - v) &= p(u) - p(v) && \text{la projection étant linéaire} \\ &= p(u) - p(p(u)) \\ &= p(u) - p(u) && \text{d'après la question précédente.} \\ &= 0_E \end{aligned}$$

- (c) L'inclusion $E_0 + E_1 \subset E$ est claire car E_0 et E_1 sont deux sev de E .

Par ailleurs tout u de E s'écrit $u = p(u) + (u - p(u))$. Ayant montré que $p(u) \in E_1$ et $u - p(u) \in E_0$, on en déduit que $E \subset E_0 + E_1$.

Donc $E = E_0 + E_1$.

Par ailleurs on a montré précédemment qu'ils étaient en somme directe donc ils sont supplémentaires dans E .

- (d) E_0 et E_1 étant supplémentaires dans E , on peut construire une base B de E en concaténant une base B_0 de E_0 avec une base B_1 de E_1 .

Tout vecteur u de B_0 vérifie $p(u) = 0$ donc donnera une colonne de 0 dans la matrice dans la base B de p .

Tout vecteur u de B_1 vérifie $p(u) = u$ donc donnera une colonne de 0 avec un 1 à la position du vecteur u dans la matrice dans la base B de p .

Cette matrice sera donc bien diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale.

On considère l'application $\langle, \rangle$ définie par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

1. On admet pour commencer que cette intégrale généralisée est bien définie. Montrer que l'application est bien un produit scalaire sur l'espace

$$L_{Herm}^2 = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-\frac{t}{2}})^2 dt < +\infty \right\}.$$

2. On détermine maintenant pour quelles fonctions cette intégrale généralisée est bien définie.

(a) Soient f la fonction constante égale à 1 et $g : t \mapsto t$. Calculer $\langle f, f \rangle$ et $\langle f, g \rangle$.

(b) Démontrer que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt \right| \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} g(t)^2 e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(c) En déduire que le produit scalaire est bien défini sur

$$L_{Herm}^2 = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-\frac{t}{2}})^2 dt < +\infty \right\}.$$

3. Construire les 4 premiers vecteurs de la bon obtenue à partir de la base canonique de $R_n[X]$ par orthonormalisation de Gram-Schmidt.



1. • Symétrie : Soient $f, g \in L_{Herm}^2$ alors

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)e^{-t} dt = \langle g, f \rangle$$

- Linéarité à gauche : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g, h \in C^0([-1, 1])$, alors par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + \mu g, h \rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))h(t)e^{-t} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t)h(t)e^{-t} dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)h(t)e^{-t} dt \quad \text{car les deux intégrales sont supposées convergentes} \\ &= \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

La symétrie du produit scalaire entraîne alors la linéarité à droite.

- Positivité : Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$, $\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

- Définie : Si $\langle f, f \rangle = 0$ alors $\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt = 0$. Or $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t)^2 e^{-t} = 0$. Or $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-t} \neq 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = 0$ et donc $f = 0$.

2. (a)



► Exercice 22. ★ ★ ★ Découverte 3 : Problème d'optimisation

Calculer $m = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$ (Indication : Ecrire m comme la distance d'un vecteur à un certain ev).



Cette quantité est l'inf d'une norme euclidienne associée au produit scalaire

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx = \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|_2^2.$$

Donc

$$m = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|_2^2 = \inf_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|_2^2 = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2.$$

L'objectif est donc de déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Or $\mathbb{R}_2[X]$ étant de dimension finie tout comme $\mathbb{R}_2[X]^\perp$, on a d'après le cours

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|_2 = \|p_{\mathbb{R}_2[X]^\perp}(X^3)\|_2.$$

$\mathbb{R}_2[X]^\perp$ étant de dimension $4 - 3 = 1$ il est judicieux de déterminer $p_{\mathbb{R}_2[X]^\perp}(X^3)$ plutôt que $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.

Il s'agit donc (exo classique) :

- de trouver $\mathbb{R}_2[X]^\perp$.
- d'en déduire une base puis une bon.
- d'en déduire la projection.
- de calculer la norme de cette projection.

$\mathbb{R}_2[X]^\perp$ est de dimension 1 : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est dans cet espace si son produit scalaire (au sens de ψ) avec 1, X, X^2 est nul.

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0 \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0 \\ \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 0 \end{cases}$$



► Exercice 23. ★ ★ ★ Découverte 1 : Espaces préhilbertiens de fonctions

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $(f, g) \in E^2$, $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) + f'(x)g'(x)dx$. On a vu dans un exercice précédent que $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$ sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux. Soit $f \in E$. Déterminer la projection orthogonale de f sur V .



On a démontré à l'exercice 15 que V et W étaient supplémentaires et orthogonaux en montrant notamment que toute fonction $f \in E$ se décomposait de manière unique avec $g \in V$ et $h \in W$ en $f = g + h$. Les fonctions g et h étaient données par :

$$h : t \mapsto \frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e}e^t - \frac{f(0)e - f(1)}{e^{-1} - e}e^{-t}$$

et

$$g : t \mapsto f(t) - \left(\frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e}e^t - \frac{f(0)e - f(1)}{e^{-1} - e}e^{-t} \right)$$

conviennent.

Donc par définition de la projection orthogonale :

$$p_V(f) = g$$

.



► Exercice 24. ★ ★ ★ Découverte 2 : Les séries de Fourier vues sous l'angle des espaces hermitiens.

Soit $E = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit E du produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

1. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien.
2. Soient $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormale de E .
3. Soient g la fonction constante égale à 1 et $h : t \mapsto t$. Calculer les produits scalaires $\langle g, e_n \rangle$ et $\langle h, e_n \rangle$.
4. A quelle notion vue en analyse 2 correspond $\langle f, e_n \rangle$?
5. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction f quelconque sur le sev $\text{Vect}(e_n, -N \leq n \leq N)$ de E .
6. A quelle notion vue en analyse 2 correspond cette projection ?
7. Calculer cette projection pour les fonctions g et h .

► **Exercice 25. ★ ★ ★ Découverte 2 : Problème sur les bon**

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tels que la propriété (P) suivante soit vérifiée :

$$(P) : \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{B}$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit la matrice symétrique $A = ((e_i|e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **1.1** Soit $x \in F^\perp$. Calculer $\|x\|^2$.
1.2 En déduire que E est de dimension finie.
2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \|e_i\| \geq 1$. Montrer qu'alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E .
3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E .
3.1 Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
3.2 Énoncer une identité de polarisation liant produit scalaire et norme associée.
3.3 En utilisant la propriété (P) , démontrer que $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)(y|e_i)$.
3.4 Montrer que l'on a $A^2 = A$.
3.5 Soit a l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le noyau de a .
3.6 En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E .



1. **1.1** Utilisez la propriété (P) .
1.2 Comment peut-on décomposer E en fonction de F ?
2. Utilisez (P) pour $x = e_i$
3. **3.1** Qu'avez-vous démontré à la question 1.2 ?
3.2 Calculer $\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2$.
3.3 Utilisez la question 3.2 pour exprimer le produit scalaire en norme.
3.4 Démontrez-le coefficient par coefficient. (Il faut connaître la formule du produit matriciel).
3.5 L'écrire coordonnée par coordonnée et utiliser la linéarité à droite du produit scalaire pour montrer que $\ker(A)$ est réduit à l'élément neutre.
3.6 En déduire que A est la matrice identité et conclure.



► **Exercice 26. ★ ★ ★ Découverte 2 : Polynômes de Tchébychev**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n .

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand $a_n \neq 0$ et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P .

Pour tout entier naturel n , on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n , la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.
3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2, c_3 .
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.
5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que pour tout n , la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie II.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
 - 1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.
 - 1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
Calculer $I_{p,p}$.
 - 1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ définie en partie I est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale?
 - 1.d. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - 1.e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X^n|T_n) = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_0, \dots, a_{n-1}$ des réels et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
 - 2.a. Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que l'on a $P = \sum_{k=0}^n b_k T_k$.
 - 2.b. Calculer b_n .
 - 2.c. Montrer que l'on a $\|P\|^2 \geq \frac{\pi}{2} b_n^2$.
 - 2.d. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^1 \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

4 AAV : Manipuler la notion de continuité de fonctions à plusieurs variables

4.1 Exercices de l'aav

► Exercice 27. ★ Classique : Des normes 1

Soit $\|\cdot\|_1 : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n |u_i|$.

Soit l'application définie sur $C^0([a, b])$, $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$.

Démontrer que ces applications sont des normes sur des ev que vous préciserez.



La norme 1 sur $\mathbb{R}^n$ est rédigée dans l'exemple 17 du cours.



► Exercice 28. ★ ★ Classique : Des normes infini

Soit $\|\cdot\|_\infty : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup |u_i|$.

Soit l'application définie sur $C^0([a, b])$, $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$,

Démontrer que ces applications sont des normes sur des ev que vous préciserez. Pour l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, vous raisonnerez en démarrant sans les $\|\cdot\|_\infty$.



Soit $f \in C^0([a, b])$,

• Positivité : Comme $\forall t \in [a, b], |f(t)| \geq 0$ alors $\|f\|_\infty \geq 0$.

• Définie : Si $\|f\|_\infty = 0$, comme $\forall t \in [a, b], 0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty$ alors $0 \leq |f(t)| \leq 0$. Donc $f(t) = 0$. Donc f est identiquement nulle.

• Inégalité triangulaire :

On a

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty && \text{par définition de la norme infinie.} \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(t) + g(t)|, t \in [a, b]\}$.

Or $\|f + g\|_\infty$ est par définition le plus petit des majorants de cet ensemble.

Donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

• Homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $\lambda = 0$, l'homogénéité est évidente.

Sinon on a $\forall t \in [a, b], |\lambda f(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$.

Donc $|\lambda| \|f\|_\infty$ est un majorant de $\{|\lambda f(t)|, t \in [a, b]\}$.

Or $\|\lambda f\|_\infty$ est le plus petit.

Donc $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$.

Réciproquement $\forall t \in [a, b], |\lambda| |f(t)| = |\lambda f(t)| \leq \|\lambda f\|_\infty$.

Donc $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq \frac{\|\lambda f\|_\infty}{|\lambda|}$.

Donc par le même argument de majorant $\|f\|_\infty \leq \frac{\|\lambda f\|_\infty}{|\lambda|}$ et donc $|\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$.

On a donc $|\lambda| \|f\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty$.



► Exercice 29. ★ ★ Classique : Savoir comparer des normes de vecteurs

Soient les normes suivantes assorties de leur ev :

• Sur $\mathbb{R}^n$: $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$.

• Sur $\mathbb{R}^n$: $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$.

• Sur $\mathbb{R}^n$: $\|u\|_\infty = \max |u_i|$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Démontrez que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq n\|u\|_\infty$.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Démontrez que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{n}\|u\|_\infty$.

3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminez une inégalité reliant $\|u\|_1$ à $\|u\|_2$.



1. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i| \leq \sum_{i=1}^n \|u\|_\infty = n\|u\|_\infty$.

Par ailleurs, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, si $|u_{i_0}| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |u_i| = \|u\|_\infty$ car dans un ensemble fini, le maximum est atteint. Donc $\|u\|_\infty = |u_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^n |u_i| = \|u\|_1$.

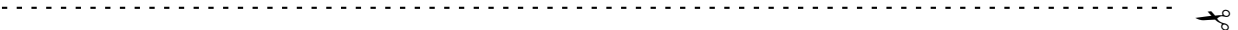
2. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|u\|_\infty^2 = n\|u\|_\infty^2$. Comme la racine carrée est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $\|u\|_2 \leq \sqrt{n}\|u\|_\infty$.

Par ailleurs, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, si $|u_{i_0}| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |u_i|$ car dans un ensemble fini, le maximum est atteint.

Or $|u_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^n |u_i|^2$. On en déduit que en prenant la racine carrée que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$

3. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \sum_{i=1}^n |u_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^{1/2} \quad \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{n} \|u\|_2 \end{aligned}$$



► Exercice 30. ★ ★ Classique : Avec des fonctions

Soient les normes suivantes assorties de leur ev :

• Sur $C^0([a, b])$: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

• Sur $C^0([a, b])$: $\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

• Sur $C^0([a, b])$: $\|f\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.

Soit f dans $C^0([a, b])$

1. Démontrez que $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

2. Démontrez que $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

3. Démontrez que $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.



1. Soit f dans $C^0([a, b])$

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|f\|_\infty dt \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ &\leq (b-a)\|f\|_\infty \end{aligned}$$

2.

3. Soit f dans $C^0([a, b])$

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt \\ &\leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b 1 dt \right)^{1/2} \quad \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \end{aligned}$$



► **Exercice 31. ★ ★ Classique : Savoir étudier la continuité de fonctions à deux variables**

Après avoir expliqué pourquoi ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, étudiez si elles le sont en $(0, 0)$:

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$h : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Tout d'abord il est clair qu'en dehors de $(0, 0)$ toutes ces fonctions sont continues comme produit, composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Le seul point posant question est $(0, 0)$.

Pour deviner si on aura continuité en $(0, 0)$, un bon moyen est de regarder le degré de la fraction en x et y : s'il est strictement positif, il y a de fortes chances que la fonction soit continue. Par exemple pour la première on a un degré 2 sur un degré 1, le quotient donne un degré 1 : il y a de bonnes chances qu'elle soit continue.

Pour la seconde le sinus est près de 0 équivalent à xy , on a donc du degré 2 au numérateur sur du degré 1 ce qui donne du degré 1, elle va sûrement être continue.

Prouvons-le

1.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \neq (0, 0), \quad |f(x, y)| &= \left| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &\leq \frac{|x^2| + |y^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{|x|^2 + |y|^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{par définition de la norme 2} \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{\|(x, y)\|_2} \\ &\leq 2 \|(x, y)\|_2 \quad \text{car } |x| \leq \|(x, y)\|_\infty \text{ et } |y| \leq \|(x, y)\|_\infty \\ &\leq 2 \|(x, y)\|_2 \quad \text{car } \|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2 \end{aligned}$$

Donc si (x, y) tend vers $(0, 0)$ alors par encadrement $f(x, y)$ tend vers 0 qui est égal à $f(0, 0)$. Donc f est continue en $(0, 0)$.

2.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \neq (0, 0), \quad |g(x, y)| &= \left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &\leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x| \\ &\leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{par définition de la norme 2} \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{\|(x, y)\|_2} \\ &\leq \|(x, y)\|_2 \quad \text{car } |x| \leq \|(x, y)\|_\infty \text{ et } |y| \leq \|(x, y)\|_\infty \\ &\leq \|(x, y)\|_2 \quad \text{car } \|(x, y)\|_2 \geq \|(x, y)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc si (x, y) tend vers $(0, 0)$ alors par encadrement $g(x, y)$ tend vers 0 qui est égal à $g(0, 0)$. Donc g est continue en $(0, 0)$.

3. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x, 0) = \frac{e^{x^4} - 1}{x^4}$. Quand $(x, 0)$ tend vers $(0, 0)$, $h(x, 0)$ ne tend pas vers $h(0, 0) = 0$. En effet, $e^{x^4} - 1$ est équivalent en 0 à x^4 (faites un DL!). Donc $h(x, 0)$ est équivalent à 1 et ne tend donc pas vers 0. Donc h n'est pas continue en $(0, 0)$.

5 AAV : Manipuler la notion de classe C^1 de fonctions à plusieurs variables

5.1 Exercices de l'aav

► **Exercice 32. ★ ★ ★ Classique : Savoir étudier le caractère C^1 de fonctions à deux variables**

1. Démontrez que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Expliquez pourquoi cette fonction est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.
 3. Démontrez que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
 4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?



1. C'est l'exo 16!
 2.
 3. En $(0, 0)$, à la différence des autres points, démontrer l'existence des dérivées partielles nécessite de revenir au taux d'accroissement.
 4. Ecrivez ce que valent les dérivées partielles en $(x, y) \neq (0, 0)$. Ecrivez ce qu'elles valent en $(0, 0)$ (question précédente). Vous êtes alors amené à faire l'exo 16 sur chaque dérivée partielle!

6 AAV : Effectuer du calcul différentiel de base sur des fonctions à plusieurs variables

6.1 Exercices de l'aav

► **Exercice 33. ★ Découverte 2 : Fonctions homogènes**

Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, tel que si $((x, y), t) \in U \times \mathbb{R}_+^*$, alors $(tx, ty) \in U$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α lorsque $\forall ((x, y), t) \in U \times \mathbb{R}_+^*, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

1. Démontrer que les fonctions $f : (x, y) \mapsto 2x + y$ et $g : (x, y) \mapsto xy^2$ sont homogènes et déterminer leur degré.
 2. Soit f homogène de degré α et de classe $C^1(U)$.
 (a) Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(tx, ty)$.
 (b) En déduire que $x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y) = \alpha f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U$.
 (c) Démontrer que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont homogènes sur U et déterminez leur degré.



1. Soient t, x, y trois réels, $f(tx, ty) = 2tx + ty = tf(x, y)$ donc f est homogène de degré 1. $g(tx, ty) = tx(ty)^2 = t^3xy^2 = t^3g(x, y)$. Donc g est homogène de degré 3.
2. (a) g est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 . D'après la règle de la chaîne

$$g'(t) = x\partial_x f(tx, ty) + y\partial_y f(tx, ty).$$

- (b) On dérive par rapport à t l'égalité $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, ce qui donne

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad x\partial_x f(tx, ty) + y\partial_y f(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

Prendre $t = 1$ donne le résultat.

- (c) On dérive par rapport à x l'égalité $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, on obtient

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad t\partial_x f(tx, ty) = t^\alpha \partial_x f(x, y).$$

Et donc pour $t \neq 0$,

$$\partial_x f(tx, ty) = t^{\alpha-1} \partial_x f(x, y).$$

Donc $\partial_x f$ est homogène de degré $\alpha - 1$. De même pour $\partial_y f$.

----- ✂

► **Exercice 34. ★ ★ Classique : Primitivation** Déterminer toutes les fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = xy^2 \\ \partial_y f(x, y) = yx^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_x f(x, y) = e^x y \\ \partial_y f(x, y) = e^x + 2y \end{cases}$$

✂ -----
Système 1 :

De la première équation, on obtient qu'il existe une fonction g telle que $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$. De la seconde qu'il existe une fonction h telle que $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + h(x)$. On en déduit que $h(x) = g(y)$ et ce pour tout x, y réels. Ceci implique que $g = h$ sont constantes. Donc toute solution s'écrit $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Réciproquement ce type de fonction est bien solution en remplaçant f dans le système.

Système 2 :

De la première équation, on obtient qu'il existe une fonction g telle que $f(x, y) = e^x y + g(y)$. De la seconde qu'il existe une fonction h telle que $f(x, y) = e^x y + y^2 + h(x)$. On en déduit que $h(x) + y^2 = g(y)$ et ce pour tout x, y réels. Ceci implique que h est constante. Donc toute solution s'écrit $f(x, y) = e^x y + y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Réciproquement ce type de fonction est bien solution en remplaçant f dans le système.

----- ✂

► **Exercice 35. ★ ★ Découverte 1 :** On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y),$$

Dans tout l'exercice, f désigne une solution de classe C^1 de cette équation.

1. Considérons l'application $\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) \in \mathbb{R}$. Calculer ses dérivées partielles.
2. En déduire que φ vérifie l'équation suivante

$$\partial_u \varphi(u, v) = \frac{1}{2} \varphi(u, v).$$

3. En déduire une expression de $\varphi(u, v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

4. Déterminer enfin les solutions f de l'équation aux dérivées partielles de départ.



1. φ est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ comme composée de fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, d'après la règle de la chaîne :

$$\partial_u \varphi(u, v) = \frac{1}{2} \partial_x f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2} \partial_y f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

et

$$\partial_v \varphi(u, v) = \frac{1}{2} \partial_x f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2} \partial_y f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

2. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, d'après la question précédente,

$$\partial_u \varphi(u, v) = \frac{1}{2} \partial_x f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2} \partial_y f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Or f est solution de l'équation aux dérivées partielles. On en déduit que

$$\partial_u \varphi(u, v) = \frac{1}{2} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2} \varphi(u, v).$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 en u . Donc pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, il existe $C : v \mapsto C(v)$ une fonction constante en u telle que

$$\varphi(u, v) = C(v) e^{\frac{u}{2}}.$$

4. Donc pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \varphi(x+y, x-y) \quad \text{car } u = x+y, v = x-y. \\ &= C(x-y) e^{\frac{x+y}{2}}. \end{aligned}$$

Réciproquement ce sont bien des solutions en remplaçant f dans l'équation.



► **Exercice 36. ★ ★ ★ Découverte 1 : L'équation des ondes.** Soit $c > 0$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes (appelées équation des ondes).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad \text{en utilisant le changement de variables } \begin{cases} u &= x + ct. \\ v &= x - ct. \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, f désigne une solution de classe C^2 de cette équation.

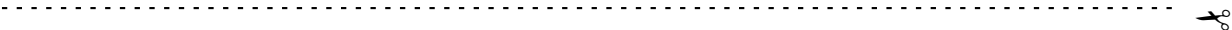
1. Considérons l'application $\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \in \mathbb{R}$. Calculer ses dérivées partielles.
2. Démontrer que pour tout (u, v) dans $\mathbb{R}^2$, $\partial_{uv}^2 \varphi(u, v) = 0$.
3. En déduire qu'il existe deux fonctions F et G d'une variable telle que

$$\varphi(u, v) = F(u) + G(v)$$

4. Déterminer alors les solutions $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ de l'edp.
5. Interpréter le nom "équation des ondes".



Indice : Considérez la nouvelle fonction $g(u, v) = f(x, y)$, exprimez x et y en fonction de u et v et exprimez les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f . N'oubliez pas les hypothèses!



6.2 Problèmes hors aav

► **Exercice 37. ★ ★ ★ Découverte 2 : Laplacien en coordonnées polaires** On s'intéresse dans cet exercice à l'opérateur Laplacien $\Delta : f \mapsto \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$. L'objectif de cet exercice est de l'écrire en coordonnées polaires. Pour cela, on considère le changement de coordonnées polaires

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Posons $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Exprimer les dérivées partielles $\partial_r g$ et $\partial_\theta g$ en fonction des dérivées partielles premières de f .
2. En déduire que

$$\partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \cos(\theta) \partial_r g(r, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \partial_\theta g(r, \theta)$$

$$\partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sin(\theta) \partial_r g(r, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \partial_\theta g(r, \theta)$$

3. Notons $g_1(r, \theta) = \partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $g_2(r, \theta) = \partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Déduire de la question 2 que

$$\partial_x^2 f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \cos(\theta) \partial_r g_1(r, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \partial_\theta g_1(r, \theta)$$

$$\partial_y^2 f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sin(\theta) \partial_r g_2(r, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \partial_\theta g_2(r, \theta)$$

4. Calculer les dérivées partielles de g_1 et g_2 en fonction de celles de g (premières et secondes).
5. En déduire la valeur de $\Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g .

► **Exercice 38. ★ ★ ★ ★ Découverte 2 : Dériver une intégrale à paramètre dans les bornes**

L'objectif de cet exercice est de dériver des intégrales à paramètres

1. Commençons avec un paramètre dans les bornes :

(a) Rappeler sous quelles hypothèses on peut dériver $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et quelle est sa dérivée.

(b) Déterminer la dérivée de $F : x \mapsto \int_1^{x^4} \cos(t) dt$.

2. **Pour les gens qui ont fait analyse 1 :** Vous avez appris à dériver des intégrales à paramètre dans l'intégrande du type $\int_0^1 f(x, t) dt$ par rapport à la variable x . Corsons l'affaire dans le but de dériver une intégrale à paramètre dans les bornes et dans l'intégrande : $\int_0^x \sin(x + t) dt$.

(a) On considère $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^y \sin(x + t) dt \in \mathbb{R}$. Déterminer ses dérivées partielles.

(b) Exprimer $\int_0^x \sin(x + t) dt$ en fonction de φ .

(c) Déduire des deux questions précédentes la dérivée de $\int_0^x \sin(x + t) dt$ par rapport à x .

3. Dérivez par rapport à x , $G : x \mapsto \int_0^{x^2} \sin(x + t) dt$.



 Indice : Considérez la nouvelle fonction $g(t, u) = f(t, u + ct)$ pour $x = u + ct$. Dérivez g par rapport à t et exprimez là en fonction des dérivées partielles de f . N'oubliez ensuite pas les hypothèses !

Vous devez trouver $f(t, x) = f^0(x - ct)$.



7 AAV : Lier détermination des extremas d'une fonction et réduction des endomorphismes symétriques

► **Exercice 39.** ★ **Classique : Savoir déterminer les extremas d'une fonction.** Déterminer les extremas locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.
3. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$.
4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.



-
1. Points critiques : $(0, 3)$, minimum local.

En-effet, f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme. On a $\partial_x f(x, y) = 2x + y - 3$ et $\partial_y f(x, y) = x + 2y - 6$. Ces deux dérivées s'annulent quand $x = 0$ et $y = 3$ (résolvez le système linéaire).

Enfin $\partial_x^2 f(x, y) = 2 = \partial_y^2 f(x, y)$ et $\partial_{xy}^2 f(x, y) = 1$.

Donc la hessienne est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de déterminant $3 > 0$ et de trace $4 > 0$. On a donc un minimum local en $(0, 3)$.

2. Points critiques : $(1, 1)$, minimum local.
3. Points critiques : $(2, -2)$, minimum local.
4. Points critiques : $(0, 0)$, pas extremum local, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$: minimum local.



.....

► **Exercice 40.** ★ **Classique : Savoir déterminer les extremas d'une fonction.**

Déterminer les extremas locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^5$.
3. $f(x, y) = x^4 + (y - 2)^4$
4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.
5. $f(x, y) = x^2 - 4x + y^3 + 3y^2 + 3y + 5$.



-
1. Points critiques : $(0, 0)$, pas d'extremum local.

En effet, $f(x, 0) - f(0, 0) = x^3$ n'est pas de signe constant.

2. Points critiques : $(0, 0)$, pas d'extremum local.
3. Points critiques : $(0, 2)$, minimum local.

En effet $f(x, y) - f(0, 2) = x^4 + (y - 2)^4$ est positif pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc même un minimum global.

4. Points critiques : $(0, 0)$, pas d'extremum local.
5. Points critiques : $(2, -1)$, pas d'extremum local.



.....

► **Exercice 41.** ★ ★ **Découverte 2 : Extremas et diagonalisation** Dans cet exercice, on étudie deux autres façons de trouver les extremas de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. A chaque fois, l'idée est de réécrire cette fonction comme somme de carrés.

1. La première méthode s'appelle **la réduction de Gauss** : celle-ci consiste à faire disparaître les termes d'ordre 1 en x et y en effectuant une factorisation canonique.

- (a) Démontrer que $x^2 + xy - 3x$ s'écrit sous la forme $(x - h(y))^2 + k(y)$ où h et k sont deux fonctions polynomiales en y , h de degré 1, k de degré 2. Pour cela on utilisera la factorisation canonique suivante (qui est une réécriture d'une identité remarquable) : $x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$.

- (b) En déduire que $f(x, y) - f(0, 3) = (x - h(y))^2 + p(y)$ où $p(y) = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{4}$.
- (c) Factoriser p .
- (d) Déduire de ce calcul, les extremas de f .
2. La second méthode consiste à utiliser **la diagonalisation des matrices symétriques**.
- (a) Déterminer S matrice symétrique de taille 2×2 de sorte que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3x - 6y$$

- (b) Diagonaliser S et déterminez en une base de vecteurs propres.
- (c) Vérifiez que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et déduisez-en une bon de vecteurs propres qui constituera votre matrice de passage P .
- (d) Démontrez que l'inverse de P est sa transposée.
- (e) On pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimez $f(x, y)$ uniquement en fonction de X et Y .
- (f) Ecrivez $f(x, y) - f(0, 3)$ sous la forme de sommes de carrés en reprenant la méthode de la réduction de Gauss.
- (g) En déduire les extremas de f .



1. (a) $x^2 + xy - 3x = (x + \frac{y-3}{2})^2 - \frac{(y-3)^2}{4}$.
- (b) Donc $f(x, y) - f(0, 3) = (x + \frac{y-3}{2})^2 - \frac{(y-3)^2}{4} + y^2 - 3x - 6y + 9 = (x + \frac{y-3}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{4}$.
- (c) $\frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{4} = \frac{3}{4}(y^2 - 6y + 9) = \frac{3}{4}(y-3)^2$.
- (d) Donc $f(x, y) - f(0, 3)$ est positif pour tout (x, y) donc c'est un minimum global.
2. (a) $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Valeurs propres : $1/2, 3/2$. Vecteurs propres : $((1, -1), (1, 1))$.
- (c) Bon $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1))$.
- (d) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3x - 6y = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 3(\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)) - 6(\frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y)) = \frac{X^2}{2} + \frac{3Y^2}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}X - \frac{9}{\sqrt{2}}Y$.
- (e) $f(x, y) - f(0, 3) = \frac{1}{2}(X + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2}(Y - \frac{3}{\sqrt{2}})^2$
- (f) Donc $f(x, y) - f(0, 3)$ est positif pour tout (x, y) donc c'est un minimum global.



► Exercice 42. ★ Classique : La pratique

Expliquer pourquoi toutes ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et donner une bon de diagonalisation.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Valeurs propres de la matrice numéro

1. 0, 2.
2. -1, -1, 5.
3. 0, 0, 3.

4. $-1, -1, 1, 1$.

5. $2, 2, 2, -2$

• **Première étape :** Premièrement la matrice est symétrique réelle donc elle est diagonalisable en bon.

• **Deuxième étape : Déterminer le spectre.** Je vous laisse calculer les valeurs propres comme vous le faisiez au premier semestre.

• **Troisième étape : déterminer les vecteurs propres de S .** Déterminons une base de E_{-2} :

$$A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate que $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ est la colonne nulle donc $e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = (1, -1, -1, -1) \in E_{-2}$.

Or $1 \leq \dim E_{-2} \leq \text{mult}(-2) = 1$ donc $\dim E_{-2} = 1$ et $((1, -1, -1, -1))$ est une base de E_{-2} .

Déterminons une base de E_2 :

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate que $C_1 + C_2$, $C_1 + C_3$, $C_1 + C_4$ donnent la colonne nulle donc $e_1 + e_2 = (1, 1, 0, 0)$, $e_1 + e_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_1 + e_4 = (1, 0, 0, 1)$ sont trois vecteurs propres de E_2 . Ces trois vecteurs propres sont libres car ils forment un système échelonné. On en déduit que $3 \leq \dim E_2$. Par ailleurs, $\dim E_2 \leq \text{mult}(2) = 3$ donc $\dim E_2 = 3$ et ces trois vecteurs forment une base de E_2 .

• **Quatrième étape : déterminer la bon de vecteurs propres.** Comme la théorie en atteste, les espaces propres sont orthogonaux entre eux. Donc pour E_{-2} , il suffit de normaliser le vecteur : $\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)$.

En revanche à l'intérieur de E_2 , il faut construire une bon car les vecteurs n'ont a priori pas de raison d'être orthogonaux.

On fait une orthonormalisation de Gram Schmidt à partir des trois vecteurs que l'on note $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$.

On normalise le premier $\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$.

On crée un vecteur orthogonal : $f_2 = u_2 - \langle u_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 2, 0)$.

On normalise le second vecteur : $\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2, 0)$.

On crée un vecteur orthogonal : $f_3 = u_3 - \langle u_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle u_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 = \frac{1}{3}(1, -1, -1, 3)$.

On normalise le second vecteur : $\epsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, -1, 3)$.

Donc $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est une bon de vecteurs propres.

..... ✂

► Exercice 43. ★ ★ Découverte 1 : Le ballon de rugby

L'ellipsoïde possédant une forme de ballon de rugby a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où a, b, c trois réels strictement positifs.

1. Nous cherchons à démontrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation

$$2x^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - 4x - 8y + 8 = 0$$

est un ellipsoïde. L'idée pour cela est d'effectuer un changement de base et d'y récrire l'équation. On note dans la suite $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - 4x - 8y + 8$.

- (a) Déterminer une matrice 3×3 symétrique $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ telle que $f(x, y, z) =$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4x - 8y + 8$$

- (b) Expliquer pourquoi cette matrice est diagonalisable et déterminez-en une bon de diagonalisation. On notera P la matrice de passage et on notera D la matrice diagonale associée.

- (c) On effectue le changement de base $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Démontrer que l'équation $f(x, y, z) = 0$ se récrit sous la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 - \xi X - \mu Y - \nu Z = \rho$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \mu, \nu, \rho$ sont des constantes que vous déterminerez.

- (d) En utilisant la factorisation canonique, démontrez que cette équation se met sous la forme d'équation d'ellipsoïde.

2. On s'intéresse maintenant aux extremas de la fonction f .

- (a) Déterminez-les à l'aide de la question précédente.
 (b) Déterminez-les en utilisant le calcul différentiel.
 (c) Parmi ces deux méthodes, laquelle donne des informations plus fortes?



1. (a) On a $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$. Il suffit donc de choisir $a = 2, b = 0, c =$

$$0, e = -1, d = 5 = f. \text{ Donc } S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (b) S étant symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ en bon. Il est clair sur la matrice que 2, 4, 6 sont valeurs propres. On a par ailleurs $E_2 = \text{vect}(1, 0, 0)$, $E_4 = \text{vect}(0, 1, 1)$ et $E_6 = \text{vect}(0, 1, -1)$. Ces espaces propres sont déjà orthogonaux car ce sont les espaces propres d'un endomorphisme symétrique. Il ne reste qu'à les normaliser. Voici donc une bon de vecteurs propres : $(1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

- (c) On a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4x - 8y + 8 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P D {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4x - 8y + 8 \quad \text{car } S = P D {}^t P \\ &= {}^t ({}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) D {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4x - 8y + 8 \quad \text{car } {}^t (AB) = {}^t B {}^t A. \\ &= \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - 4x - 8y + 8 \end{aligned}$$

$$\text{Or on sait que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Z) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - Z) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (X \ Y \ Z) D \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - 4X - \frac{8}{\sqrt{2}}(Y + Z) + 8 \\ &= 2X^2 + 4Y^2 + 6Z^2 - 4X - \frac{8}{\sqrt{2}}(Y + Z) + 8 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x, y, z) = 0 \text{ s'écrit } 2X^2 + 4Y^2 + 6Z^2 - 4X - \frac{8}{\sqrt{2}}(Y + Z) = -8$$

(d)

$$\begin{aligned} 2X^2 + 4Y^2 + 6Z^2 - 4X - \frac{8}{\sqrt{2}}(Y + Z) &= 2(X^2 - 2X) + 4(Y^2 - \sqrt{2}Y) + 6(Z^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}Z) \\ &= 2(X - 1)^2 - 2 + 4(Y - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2 + 6(Z - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

----- ✂

7.1 Problèmes hors aav

► **Exercice 44. ★ ★ Découverte 1 : Endomorphisme positif et représentation matricielle.**

On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto (2X - 1)P'(X) + (X^2 - X)P''(X)$ est symétrique.

1. Vérifiez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.
2. On considère le cas $n = 2$:
 - (a) Démontrer que φ est bien un endomorphisme.
 - (b) Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. La matrice est-elle symétrique?
 - (c) Orthonormalisez la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire considéré.
 - (d) Ecrire la matrice de φ dans la base orthonormalisée. La matrice est-elle symétrique?
3. On considère maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Exprimer $\langle (X^2 - X)Q, P'' \rangle$ en fonction de produits scalaires impliquant P' , Q et Q' à l'aide d'une intégration par parties.
 - (b) En déduire que l'endomorphisme φ est symétrique.
 - (c) Expliquez les résultats obtenus aux questions 2.b et 2.d.

✂

1. Fait dans le cours.

2. (a)

(b) $\varphi(1) = 0, \varphi(X) = 2X - 1, \varphi(X^2) = 6X^2 - 4X$. Donc la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(c) Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la famille de vecteurs dans le même ordre.

- $e_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = 1$ car $\|e_1\| = \sqrt{\int_0^1 dt} = 1$.
- $f_2 = e_2 - \langle e_2, e_1 \rangle e_1 = X - \int_0^1 t dt = X - \frac{1}{2}$.
- $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{X - 1/2}{\sqrt{\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt}} = 2\sqrt{2}X - \sqrt{2}$.
- $f_3 = e_3 - \langle e_3, e_1 \rangle e_1 - \langle e_3, e_2 \rangle e_2 = \dots$

et on normalise ce dernier vecteur.

(d) La matrice exprimée dans cette base est nécessairement symétrique puisqu'elle est l'expression dans une bon d'un endomorphisme symétrique.

3. (a)

$$\begin{aligned}
 \langle (X^2 - X)Q, P'' \rangle &= \int_0^1 (t^2 - t)Q(t)P''(t)dt \\
 &= [(t^2 - t)Q(t)P'(t)]_0^1 - \int_0^1 ((t^2 - t)Q(t))'P'(t)dt \quad \text{par IPP} \\
 &= - \int_0^1 ((2t - 1)Q(t) + (t^2 - t)Q'(t))P'(t)dt \\
 &= - \int_0^1 (2t - 1)Q(t)P'(t)dt - \int_0^1 (t^2 - t)Q'(t)P'(t)dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= -\langle (2X - 1)P', Q \rangle - \int_0^1 (t^2 - t)Q'(t)P'(t)dt
 \end{aligned}$$

- (b) De la question précédente, on déduit que $\langle \varphi(P), Q \rangle = - \int_0^1 (t^2 - t)Q'(t)P'(t)dt$ une expression où P et Q jouent des rôles symétriques. Donc on aurait obtenu le même résultat en partant de $\langle P, \varphi(Q) \rangle$. Et ce pour tous polynômes P et Q . On en déduit que φ est un endomorphisme symétrique.
- (c) La matrice exprimée dans une bon est nécessairement symétrique puisque l'endomorphisme est symétrique. En revanche dans la base canonique qui n'est pas une bon pour ce produit scalaire, il n'y a pas de raison qu'elle le soit.

----- ✂

► **Exercice 45. ★ ★ Découverte 2 : Racine carrée d'une matrice.**

Notons $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres positives. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On cherche à montrer que S admet une racine carrée c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = M^2$.

1. Commençons par l'exemple :

- (a) Considérons la matrice $S = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- (b) Diagonaliser cette matrice et déterminez-en une base de vecteurs propres. On notera D la matrice diagonale associée.
- (c) Démontrer que D admet une racine carrée.
- (d) Démontrer par récurrence sur k que pour toute matrice inversible P , pour toute matrice A ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

- (e) En déduire que S admet une racine carrée et calculer cette racine carrée.
2. Démontrons-le maintenant théoriquement. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En utilisant le théorème spectral et en vous inspirant ce que vous avez fait précédemment, montrer que S admet une racine carrée.

✂ -----

1. (a) Cette matrice a pour valeurs propres 3 et 9. Donc elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- (b) $(1, -1) \in E_3$ et $(1, 1) \in E_9$.
- (c) Il suffit de prendre $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- (d) Initialisation : Pour $k = 0$, on a bien $(P^{-1}AP)^0 = I_n = P^{-1}I_nP = P^{-1}A^0P$.
Hérédité : Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$.
Alors $(P^{-1}AP)^{k+1} = (P^{-1}AP)^k(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kPP^{-1}AP = P^{-1}A^kAP = P^{-1}A^{k+1}P$.
Ce qui achève la récurrence.
- (e) Ainsi $S = PDP^{-1} = P(\sqrt{D})^2P^{-1} = (P\sqrt{D}P^{-1})^2$. Donc $P\sqrt{D}P^{-1}$ est une racine carrée de S .
2. Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable à valeurs propres réelles. Comme elle est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors ses valeurs propres qu'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives. Donc $S = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2 P^{-1} = (P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1})^2$.

----- ✂

► **Exercice 46. ★ ★ Découverte 2 : Endomorphismes symétriques**

Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

On dit que deux sev F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

1. Démontrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont orthogonaux.
2. En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E .
3. Soient deux espaces propres associés à deux valeurs propres différentes λ et μ , démontrer que ces deux espaces propres sont orthogonaux.



Indices :

1. Quelle est l'écriture du produit scalaire en bon ? Comment s'écrit $f(x)$?
2. Prendre deux éléments (un dans chaque espace), traduisez ce que ça veut dire et vérifiez que leur produit scalaire est nul.

Pour supplémentaire, démontrez dimension et intersection nulle.

Correction :

1. Soit $x \in \ker(f), y \in \text{Im}(f)$ alors $\exists z \in E, y = f(z)$.

Donc

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, f(z) \rangle \\ &= \langle f(x), z \rangle \quad \text{car } f \text{ est symétrique} \\ &= \langle 0_E, z \rangle \quad \text{car } x \in \ker(f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Etant orthogonaux ils sont donc en somme directe. Le théorème donne l'égalité des dimensions. Donc ils sont supplémentaires dans E .
3. Fait dans le cours.



► **Exercice 47. ★ ★ ★ Découverte 2 : Nilpotence et symétrie**

On appelle matrice nilpotente une matrice A telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*, A^p = 0$. On appelle alors indice de nilpotence l'entier p .

1. Démontrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

2. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soit λ une valeur propre de A et u un vecteur propre associé. Démontrer par récurrence que k dans $\mathbb{N}^*$, que u est vecteur propre de A^k associé à la valeur propre λ^k .
- (b) En déduire que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de A .
- (c) Expliquer pourquoi A n'est pas inversible.
- (d) Supposons que A soit diagonalisable : démontrer que A est la matrice nulle.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et commutant avec sa transposée.

- (a) Démontrer que $S = {}^t A A$ est également nilpotente.
- (b) Déduire de ce qui précède que S est la matrice nulle.
- (c) En déduire que $A = 0$.



1.



► **Exercice 48. ★ ★ ★ Découverte 2 : Matrices symétrique positives**

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on dit que S est positive si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tX S X \geq 0$. On dit qu'elle est symétrique définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}, {}^tX S X > 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. On cherche à montrer qu'une matrice est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

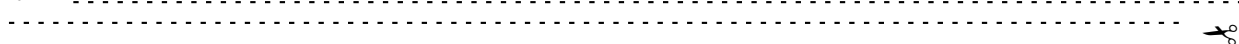
Pour cet exercice, on rappelle que si $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = [n_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj}.$$

1. Quelle est la taille de la matrice ${}^tX S X$?
2. Démontrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\varphi : (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto {}^tX S Y \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
3. Exemple dans le cas diagonal
 - (a) Considérons $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, démontrer que D est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - (b) Soit Λ une matrice diagonale à valeurs propres positives : démontrer que Λ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Quelles conditions doivent vérifier les valeurs propres afin qu'elle soit dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?
4. **La théorie en se ramenant au cas diagonal.** Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
 - (a) Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé. Démontrer que $\lambda \geq 0$.
 - (b) Démontrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\lambda > 0$.
 - (c) A l'aide de la formule du produit matriciel, démontrez que

$${}^tX S X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_{ij} X_i X_j.$$

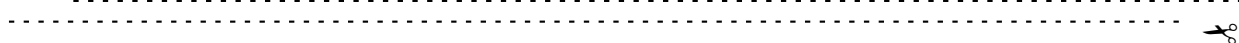
- (d) Supposons maintenant que toutes les valeurs propres soient positives. A l'aide du théorème spectral, démontrez que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- (e) De même démontrer que si les valeurs propres sont strictement positives alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.



► **Exercice 49. ★ ★ ★ ★ Découverte 1**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit $u \in E$ unitaire.

1. Montrer que $\lambda_1 \leq \langle f(u), u \rangle \leq \lambda_n$. On pourra décomposer u dans une base bien choisie.
2. Montrer que $\langle f(u), u \rangle = \lambda_1 \iff f(u) = \lambda_1 u$.



► **Exercice 50. ★ ★ ★ ★ Découverte 2** Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $S = \left(\frac{1}{(\alpha_i + \alpha_j)^p} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer que la matrice S de l'énoncé a toutes ses valeurs propres positives.

1. Justifier l'existence de S et montrer que S est symétrique.
2. (a) Calculer $\int_0^{+\infty} u e^{-u} du$.
- (b) Démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du = (p-1)!$
- (c) Montrer que pour $(s, p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\int_0^{+\infty} e^{-st^{\frac{1}{p}}} dt$ et $\int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du$ sont convergentes en établissant une relation entre ces deux intégrales à l'aide d'un changement de variable.

(d) En déduire que pour $(s, p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\int_0^{+\infty} e^{-st^{\frac{1}{p}}} dt = \frac{p!}{s^p}$.

3. On rappelle qu'une matrice symétrique a ses valeurs propres positives si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tX S X \geq 0$.

(a) Démontrer que ${}^tX S X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\alpha_i + \alpha_j)^p} X_i X_j$.

(b) À l'aide de la question 2.d, montrer que S a ses valeurs propres positives.



► **Exercice 51. ★ ★ ★ Découverte 2 : Inégalité d'Hadarnard**

Notons $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres strictement positives. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on rappelle qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP S P = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(a) En utilisant le théorème spectral, montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = {}^tM M$.

(b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX S X \geq 0$.

(c) Montrer que $\forall i$, $s_{ii} \geq 0$.

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $S = {}^tM M$.

(b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tX S X > 0$.

(c) Montrer que $\forall i$, $s_{ii} > 0$.

3. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

4. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, telle que $\forall i$, $s_{ii} = 1$.

(a) Montrer que $\exp$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

(b) Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

5. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit T la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $t_{ii} = 1/\sqrt{s_{ii}}$ et B définie par $B = T S T$.

(a) Montrer que pour tout vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$: ${}^tX B X > 0$.

(b) En déduire que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(c) Démontrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et notons $S = {}^tA A$.

(a) Montrer que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

(b) En déduire que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_{ki})^2}$.

