Questions de l'atelier mémoire

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ? Détaillez l'axiome ...
2. Qu'est-ce qu'un ev préhilbertien, un ev euclidien ?
3. Donner deux exemples de produit scalaire et l'ev associé : l'un associé à un ev euclidien, l'autre à un préhilbertien.
4. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Qu'est-ce qu'une famille orthogonale d'un ev ?
6. Donner une famille orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
7. Enoncer le théorème de Pythagore généralisé.
8. Y a-t-il un lien entre famille libre et famille orthogonale ?
9. Qu'est-ce qu'une bon ?
10. Dessinez une bon + une famille orthogonale mais non orthonormale.
11. Dans un ev euclidien, existe-t-il toujours une bon ?
12. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, écrire l'algorithme du procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt (avec les formules) sur les deux premiers vecteurs. Que fait cet algorithme ?
13. Comment s'écrivent les coordonnées d'un vecteur dans une bon $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un ev euclidien ? Cette écriture est-elle valable pour une base quelconque.
14. Qu'est-ce que l'orthogonal d'un sev ?
15. Dessiner un sev de $\mathbb{R}^3$ et son orthogonal.
16. Sous quelle condition F et son orthogonal sont-ils supplémentaires dans E ?
17. Expliquer sur un dessin pourquoi être dans l'orthogonal de F c'est être orthogonal à une base de F. Expliquer l'intérêt de ce résultat.
18. Expliquer la méthode pratique pour trouver l'orthogonal d'un sev.
19. Donner l'expression de la projection orthogonale sur un sev de dimension finie F d'un EV E.
20. Que dire de $u - p_F(u)$?
21. Quelle est la définition de la distance d'un vecteur u d'un ev E à un sev F de E.
22. Citer un théorème qui permet de trouver la distance d'un vecteur à un sev d'un ev E.
23. Qu'est-ce qu'une norme ? Citer l'axiome de ... .
24. Citer des exemples de norme sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$.
25. Que peut-on dire des différentes normes de $\mathbb{R}^n$?
26. Qu'est-ce qu'une boule ?
27. Qu'est-ce qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en termes de limite ?
28. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point de $\mathbb{R}^2$?
29. Donnez la définition de f est dérivable en a un réel.
30. Donnez la définition de la dérivée partielle $\partial_x f(a, b)$.
31. Qu'est-ce qu'une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
32. Donnez la définition d'une matrice jacobienne à une fonction f en un point a ?
33. Que vaut la matrice jacobienne pour une fonction à variable réelle ?
34. Qu'est-ce qu'une fonction de classe $C^2(R^2)$?
35. Sous quelle condition dériver en x puis en y est équivalent à dériver en y puis en x ?
36. Donner une condition nécessaire pour une fonction d'avoir un extremum local.
37. Donner une condition suffisante d'avoir ou de ne pas avoir d'extremum local.

38. Comment en pratique rechercher les extremas locaux ?
39. Donnez la définition d'une matrice hessienne à une fonction f en un point a ?
40. Qu'est-ce qu'un endomorphisme symétrique ?
41. Que dire de la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base donnée ?
42. Que dire des valeurs propres et des espaces propres d'un endomorphisme symétrique ?
43. Citer le théorème spectral.
44. Décomposer la méthode pour diagonaliser en bon une matrice symétrique réelle.

Questions à poser sur les parties du cours

Partie 2.4.1

1. Dessinez famille orthog, orthog non orthon.
2. Etapes preuve Pythagore.
3. Etapes preuve orthog non nuls implique libre.
4. Est-ce qu'orthog implique libre ? Orthon implique libre ?
5. Ecrire Pythagore pour produit scalaire fonctionnel.

Partie 2.4.2

1. Dessinez famille orthon non bon, bon.
2. Pouvez-vous donner une bon de 2 vecteurs dans R3 ?
3. Preuve coordonnées bon.
4. Intérêt du th des coordonnées en bon ?

Partie 2.5

1. La borne inférieure d'un ensemble est-elle nécessairement dans l'ensemble ?
2. Qu'est-ce que la borne inférieure pour vous ?

Partie 3.3.1

1. Dessinez deux ev supplémentaires de $\mathbb{R}^2$ et deux ev non supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, dessinez la projection d'un vecteur sur l'axe des abscisses parallèlement à $Vect(1, 1)$.

Partie 3.3.2

1. Pourquoi a-t-on besoin du côté supplémentaire pour définir la notion de projection ?

Partie 3.4.1 :

1. Définir sans maths la notion d'orthogonal d'un sev.
2. Est-ce que toute droite perpendiculaire à un sev est dans son orthogonal ?
3. Dessiner l'orthogonal d'un plan dans $\mathbb{R}^3$.
4. Quel est l'intérêt pratique de la proposition disant qu'être ortho c'est être ortho à une base.
5. Expliquez toutes les étapes de la preuve de cette proposition.

Partie 3.4.2 :

1. Pourquoi faut-il que F et F ortho soient supplémentaires pour définir la projection ortho ?
2. Expliquez les étapes de la preuve de l'intersection du th fonda.
3. Que signifie en termes de vecteur le théorème fondamental ?

Partie 3.4.3 :

1. Représenter sur un dessin la projection orthogonale parallèlement à un sev dans R2 ou R3.

Partie 3.5.1

1. Expliquez les étapes de la preuve de la formule de la projection.
2. Dans la formule de la projection à quel ensemble appartiennent pF(u), ei, les produits scalaires.

Partie 3.5.2

1. Comment écrire autrement u-PF(u)
2. Quel est le lien entre PF(u) et PForth(u) ?

Partie 3.6

1. D'où viennent les formules de GS ? Pourquoi sait-on qu'elles vont marcher ?
2. Pourquoi peut-il être mieux de déterminer PForth(u) plutôt que PF(u) ?

Partie 3.7

1. Expliquez les étapes de la preuve du th de la distance.
2. Dessinez le théorème de la distance.

Partie 4.1.1

1. Comment définit-on la continuité en un point pour une fonction d'une variable réelle et le représenter sur un dessin.

Partie 4.1.2

1. Que mesure une norme. Dire en français ce que signifient les trois premiers axiomes de la norme et représenter graphiquement le 4 è (inégalité trg).
2. Expliquer la démo liant les boules avec leurs dessins. Expliquer toutes les étapes de la preuve.
3. Expliquer toutes les étapes de la preuve que la norme 1 est une norme.

Partie 4.1.3

1. Que signifie, en termes de direction, le fait qu'une fonction à plusieurs variables soit continue en un point a ? Est-ce différent pour une fonction d'une variable réelle ?
2. Quelle stratégie permet de montrer qu'une fonction de plusieurs variables n'est pas continue en un point ?
3. Quelle stratégie permet de montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue en un point non problématique ? en un point problématique ?
4. Expliquer toutes les étapes de la preuve de l'exemple de continuité avec normes équivalentes.

Partie 4.2.1

1. Expliquer géométriquement taux d'accroissement et dérivée.

Partie 4.2.2

1. La valeur absolue est elle dérivable en 0 : preuve.

- En quoi la définition des dérivées partielles des fonctions à plusieurs variables découle-t-elle de celle des fonctions d'une variable réelle ?
- Pour démontrer l'existence de dérivées partielles en un point, utilise-t-on toujours le taux d'accroissement ? Pourquoi ?
- A une variable, dérivabilité implique continuité. A plusieurs variables, l'existence de dérivées partielle n'implique pas la continuité. A quoi est due cette différence ?

Partie 4.2.4

1. Donner la méthodo pour montrer le caractère C^1.
2. Expliquer les étapes de la preuve de l'exemple C^1.

Partie 4.2.5

1. Quel est l'analogue en dim 1 de la règle de la chaîne ?
2. Expliquer les étapes de la preuve de la règle de la chaîne en polaire.

Partie 4.3.1

1. Verbaliser la définition en quantificateurs de min local.
2. Lien entre min local et dérivée ? Contre exemple.
3. En quoi la dérivée seconde est utile pour déterminer l'extremum local ?
4. Expliquer étapes preuves min local implique dérivée nulle.

Partie 4.3.2

1. Verbaliser la définition en quantificateurs de min local.
2. Pour une fonction d'une variable réelle, que signifie géométriquement d'avoir un extr loc ? Pour une fonction de R^2 dans $\mathbb{R}$?
3. Lien entre min local et dérivée ? Contre exemple.

Partie 4.3.3

1. Construire la matrice jacobienne d'une fonction particulière.

Partie 4.3.4

1. Pourquoi le DL sert pour trouver l'extremum local ?

Partie 4.4.1

1. Comment définit-on/calcule-t-on une dérivée partielle seconde ?

Partie 4.4.2

1. Quelle est la taille de la hessienne d'une fonction de Rn dans R ? Quel objet est-ce ?
2. En quoi le fait que la hessienne soit diagonale nous aiderait pour l'étude des extremas ?

Partie 4.4.3

1. Sous quelle condition la matrice hessienne est-elle symétrique ?

Partie 5.1

1. Expliquer les étapes de la preuve de la proposition. Pourquoi l'hypothèse matrice en bon est-elle importante ?

Partie 5.2

1. Expliquer les étapes de la preuve de la proposition de la réalité du spectre.
2. Expliquer les étapes de la preuve de la proposition de l'orthogonalité des ev propres.
3. Si on calcule une base de vecteurs propres d'un endo symétrique, est-ce forcément une famille orthogonale ?
4. Une matrice symétrique complexe est-elle diagonalisable ?