Feuille 4 : Intégrales à paramètre et intégrales doubles

Exercice 1. (Continuité de fonctions de deux variables)
Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$ pour mesurer les distances dans $\mathbb{R}^2$. On pourrait tout aussi bien choisir la norme euclidienne ou la norme "infinie"(voir le cours).

1. $f_1(x,t) = \dfrac{xt}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_1(0,0) = 0$. La fonction f_1 n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, la suite de points $\big((1/n,1/n)\big)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $(0,0)$ (en effet, on a $||(1/n,1/n)-(0,0)||_1 = |1/n-0|+|1/n-0| = 2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$). Mais les images $f_1\big((1/n,1/n)\big) = \dfrac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$ ne tendent par $f_1\big((0,0)\big) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

2. $f_2(x,t) = \dfrac{x^3}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_2(0,0) = 0$. Il est clair que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. En effet, les fonctions $g : (x,t) \mapsto x^3$ et $h : (x,t) \mapsto x^2+t^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Le quotient g/h est donc continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
   Montrons que f_2 est également continue en $(0,0)$. Pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on majore la différence[1] $|f_2(x,t) - f_2(0,0)|$
   $$|f_2(x,t) - f_2(0,0)| = \frac{|x|^3}{x^2+t^2} = |x|\,\frac{x^2}{x^2+t^2} \leq |x| \leq |x|+|t| = ||(x,t)-(0,0)||_1.$$
   On en déduit que $|f_2(x,t) - f_2(0,0)|$ tend vers 0 quand $||(x,t)-(0,0)||_1$ tend vers 0. Ce qui démontre la continuité de f_2 en $(0,0)$.

3. $f_3(x,t) = \dfrac{x^2-t^2}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_3(0,0) = 0$. La fonction f_3 n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, la suite de points $\big((1/n,0)\big)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $(0,0)$. Mais les images $f_1\big((1/n,0)\big) = 1$ ne tendent par $f_1\big((0,0)\big) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

4. $f_4(x,t) = \sin(x^2+t^2)\dfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_4(0,0) = 0$. Il est clair que f_4 est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. En effet, la fonction $g : (x,t) \mapsto x^2+t^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : u \mapsto \sin(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $r : u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et g est strictement positive sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Le quotient $h \circ g / r \circ g$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
   Montrons que f_4 est également continue en $(0,0)$. On majore la différence $|f_4(x,t) - f_4(0,0)|$ en utilisant la majoration célèbre $|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$:
   $$|f_4(x,t) - f_4(0,0)| \leq \frac{x^2+t^2}{\sqrt{x^2+t^2}} = \sqrt{x^2+t^2} \leq |x|+|t| = ||(x,t)-(0,0)||_1.$$
   On en déduit que $|f_4(x,t) - f_4(0,0)|$ tend vers 0 quand $||(x,t)-(0,0)||_1$ tend vers 0. Ce qui démontre la continuité de f_4 en $(0,0)$.

Exercice 2. (Dérivées partielles)
A vous de jouer.

Exercice 3. (Etude d'une intégrale à paramètre : examen 2022)
On pose, sous réserve de l'existence, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

[1] On note $f(x,t)$ au lieu de $f\big((x,t)\big)$ pour raison esthétique.

1. On note $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$. Si x est fixé dans $]0,+\infty[$, il est clair que la fonction partielle $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est bien définie. La fonction qu'on note F qui à x associe $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est donc bien définie sur $]0,+\infty[$.

   En fait, la fonction $f : (x,t) \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times[0,1]$. Donc l'intégrale à paramètre F est continue sur $]0,+\infty[$.

2. On voit que f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ en tout point (x,t) de $]0,+\infty[\times[0,1]$ et $\partial_x f(x,t) = -\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ et la fonction $(x,t) \mapsto \partial_x f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[\times[0,1]$. On en déduit que l'intégrale à paramètre F est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.$$

3. Grâce à cette expression, il est clair que $F'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ donc F est décroissante.

4. Pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,1]$, on a $0 \leq f(x,t) \leq e^{-t}/x$. On en déduit, pour tout $x > 0$,

$$(*) \qquad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-t}\,dt.$$

   En particulier, grâce au théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

   Pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,1]$, on a $\dfrac{e^{-1}}{t+x} \leq f(x,t)$. On en déduit , pour tout $x > 0$,

$$(**) \qquad e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{t+x}\,dt = e^{-1}(\ln(1+x) - \ln(x)) = e^{-1}\ln(1+1/x) \leq F(x).$$

   Par comparaison, comme $\lim_{x\to0^+} \ln(1+1/x) = +\infty$, on déduit $\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty$.

5. On améliore l'encadrement $(*)$ en minorant plus précisément. On a, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,1]$, $e^{-t}/(1+x) \leq f(x,t) \leq e^{-t}/x$. On en déduit, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x+1}\int_0^1 e^{-t}\,dt \leq xF(x) \leq \int_0^1 e^{-t}\,dt.$$

   Il en résulte grâce au théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \int_0^1 e^{-t}\,dt = 1 - e^{-1}$.

6. On admet que $\forall t \in [0,1]$, $1 - t \leq e^{-t} \leq 1$. Cela va permettre d'améliorer l'estimation $(**)$. On a, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,1]$, $\dfrac{1}{t+x} - 1 \leq \dfrac{1-t}{t+x} \leq f(x,t) \leq \dfrac{1}{t+x}$. On en déduit, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{t+x} - 1\Big)\,dt = \ln(1+x) - \ln(x) - 1 \leq F(x) \leq \ln(1+x) - \ln(x).$$

   Pour tout $x \in]0,1[$, on divise par $-\ln(x)$ tous les membres de cet encadrement. Les membres de droite et de gauche tendent alors vers 1 quand x tend vers 0^+. On en déduit que $F(x)/(-\ln(x))$ tend aussi vers 1 quand x tend vers 0^+ par le théorème des gendarmes. Donc on a $F(x) \sim_{x\to0^+} -\ln(x)$.

Exercice 4 (Calcul de l'intégrale de Gauss)
On note f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{ et } \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt.$$

1. La fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et f n'est autre que sa primitive qui s'annule en 0. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = h(x) = e^{-x^2}$.

   On pose $u(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$. La fonction u ainsi définie est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. Donc l'intégrale à paramètre g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$., De plus, la fonction u admet une dérivée partielle par rapport à x :

   $$\partial_x u(x,t) = -2x(1+t^2)\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}.$$

   L'application $\partial_x u : (x,t) \mapsto \partial_x u(x,t)$ étant continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètres dit que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

   $$g'(x) = \int_0^1 \partial_x u(x,t)\,dt = \int_0^1 -2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-v^2}\,dv$$

   où on a fait le changement de variable $v = xt$ pour $x \neq 0$, l'égalité restant vraie pour $x = 0$. La fonction $h = f^2 + g$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$, on la dérive ! Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$h'(x) = 2f(x)f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-v^2}\,dv = 0.$$

   La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. On commence par encadrer l'intégrande (c'est-à-dire la fonction qu'on intègre.) On a $0 \leq u(x,t) = e^{-x^2}\dfrac{e^{-(xt)^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$. Puis on intègre (en t) entre $t = 0$ et $t = 1$. On en déduit l'encadrement : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$. Cela implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité (vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

   $$\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + g(x) = h(0) = \frac{\pi}{4}$$

   et on obtient $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. On a établi :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5.(Une intégrale à paramètre)
Soit $A > 0$ fixé jusqu'à (y compris) la question 3.a). On considère l'intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

1. On note $f(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$. Si x est fixé dans $\mathbb{R}$, il est clair que la fonction partielle $t \mapsto f(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,A]$, donc l'intégrale $\int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ est bien définie. La fonction qu'on note F qui à x associe $\int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

   On voit que f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ en tout point (x,t) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$ et la fonction $(x,t) \mapsto \partial_x f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}\times[0,A]$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres dit alors que F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x) = -\int_0^A t\sin(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

2. On intègre par parties et on obtient

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^A - \frac{1}{2}\int_0^A x\cos(xt))e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{e^{-A^2}}{2}\sin(xA) - \frac{x}{2}F(x) \end{aligned}$$

3. a) On suit l'indication et on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(F(x)e^{x^2/4}\Big) &= F'(x)e^{x^2/4} + \frac{x}{2}F(x)e^{x^2/4} \\ &= -\frac{x}{2}F(x)e^{x^2/4} + \frac{e^{-A^2}}{2}\sin(xA)e^{x^2/4} - \frac{x}{2}F(x)e^{x^2/4} \\ &= \frac{e^{-A^2}}{2}\sin(xA)e^{x^2/4} \end{aligned}$$

   On intègre l'égalité et on obtient $F(x)e^{x^2/4} = F(0) + \frac{1}{2}e^{-A^2}\int_0^x \sin(uA)e^{u^2/4}\,du$, c'est-à-dire (en remarquant que $F(0) = \int_0^A e^{-t^2}\,dt$)

$$(*) \qquad F(x) = e^{-x^2/4}\int_0^A e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}e^{-x^2/4}e^{-A^2}\int_0^x \sin(uA)e^{u^2/4}\,du.$$

   b) On a la majoration

$$\frac{1}{2}e^{-x^2/4}e^{-A^2}\Big|\int_0^x \sin(uA)e^{u^2/4}\,du\Big| \le \frac{1}{2}e^{-x^2/4}e^{-A^2}\int_0^x |\sin(uA)|e^{u^2/4}\,du \le \frac{1}{2}e^{-x^2/4}e^{-A^2}\int_0^x e^{u^2/4}\,du.$$

   Quand on fait tendre A vers $+\infty$, le membre de droite, donc celui de gauche, tend vers 0. Dans l'égalité $(*)$, on fait donc tendre A vers $+\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2/4}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}.$$

4. **(Commentaire en bonus.)** Une approche plus naturelle est de considérer l'intégrale à paramètre $G(x) = \int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$. Comme celle-ci est impropre, il faut être plus prudent. On note $f(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$. Si x est fixé dans $\mathbb{R}$, il est clair que la fonction partielle $t\mapsto f(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$(**) \qquad |f(x,t)| \le e^{-t^2} := g(t) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et tout } t\in[0,+\infty[.$$

On rappelle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ de la fonction continue positive $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est une intégrale impropre convergente. On en déduit par comparaison que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge (ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$) et donc la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Vue que l'hypothèse de domination $(**)$ est vérifiée et que $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$, on peut affirmer que l'intégrale à paramètre G est continue sur $\mathbb{R}$.

On voit que f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ en tout point (x,t) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$ et la fonction $(x,t) \mapsto \partial_x f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. De plus :

$$(***) \qquad |\partial_x f(x,t)| \le te^{-t^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0,+\infty[$$

où la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge. On en déduit que l'intégrale à paramètre G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

On calcule cette intégrale en intégrant par parties (comme en 2a))et on trouve $G'(x) = -\dfrac{x}{2}G(x)$. On intègre cette équation différentielle (voir l'indication du 3a)) et on trouve directement $G(x) = G(0)e^{-x^2/4} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}$.

Exercice 7. (Fubini 1)

1. Soit $Q = [0,1]\times[0,1]$. La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{x+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le carré Q. Le théorème de Fubini s'applique et dit que $\displaystyle\iint_Q ye^{x+y^2}\,dxdy = \iint_Q ye^xe^{y^2}\,dxdy = \int_0^1 e^x\Big(\int_0^1 ye^{y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 e^x\Big(\frac{1}{2}[e^{y^2}]_0^1\Big)\,dx = \frac{e-1}{2}\int_0^1 e^x\,dx = \frac{e-1}{2}[e^x]_0^1 = \frac{(e-1)^2}{2}$.

   La fonction $g : (x,y) \mapsto x\ln\big(x(1+y)\big) = x\ln(x) + x\ln(1+y)$ est continue sur Q à condition de prolonger $u : x \mapsto x\ln(x)$ en $x = 0$ par $u(0) = 0$, ce qui revient à poser $g(0,y) = 0$ pour tout $y \in [0,1]$. Le théorème de Fubini s'applique et dit que $\displaystyle\iint_Q x\ln\big(x(1+y)\big)\,dxdy = \iint_Q \big(u(x) + x\ln(1+y)\big)\,dxdy = \iint_Q u(x)\,dxdy + \iint_Q x\ln(1+y)\,dxdy = \int_0^1 u(x)\Big(\int_0^1 dy\Big)\,dx + \int_0^1 x\Big(\int_0^1 \ln(1+y)\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 u(x)\,dx + \Big(\int_0^1 \ln(1+y)\,dy\Big)\Big(\int_0^1 x\,dx\Big)$.

   On a classiquement en intégrant par parties $\displaystyle\int_\epsilon^1 x\ln(x)\,dx = [\frac{x^2}{2}\ln(x)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\epsilon^2\ln(\epsilon) - [\frac{x^2}{4}]_\epsilon^1$ qui tend vers $-1/4$ quand ϵ tend vers 0^+. Donc on a $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx = -1/4$.

   De la même manière, en intégrant par parties, on a $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+y)\,dy = [(1+y)\ln(1+y)]_0^1 - \int_0^1 dy = 2\ln(2) - 1$.

   On obtient finalement $\displaystyle\iint_Q x\ln\big(x(1+y)\big)\,dxdy = -1/4 + (2\ln(2)-1)\frac{1}{2} = \ln(2) - 3/4$.

2. Soit $Q=[0,\pi]\times[0,\pi/2]$. La fonction $h:(x,y)\mapsto \sin(x+y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Q. Grâce au théorème de Fubini, on calcule : $\iint_Q \sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dx\right)dy = \int_0^{\pi/2}\left([-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\pi}\right)dy = \int_0^{\pi/2} 2\cos(y)\,dy = 2[\sin(y)]_0^{\pi/2} = 2.$

Exercice 8. (Fubini 2)
Soient $0<a<b$ deux réels positifs. On veut calculer

1. Soient $0<\epsilon<A$ et l'intégrale $\displaystyle\iint_{[\epsilon,A]\times[a,b]} e^{-xy}\,dxdy$. La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le rectangle $[\epsilon,A]\times[a,b]$. On peut utiliser le théorème de Fubini, et on a d'une part
$$\iint_{[\epsilon,A]\times[a,b]} e^{-xy}\,dxdy = \int_\epsilon^A\left(\int_a^b e^{-xy}\,dy\right)dx = \int_\epsilon^A \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$
et d'autre part
$$\iint_{[\epsilon,A]\times[a,b]} e^{-xy}\,dxdy = \int_a^b\left(\int_\epsilon^A e^{-xy}\,dx\right)dy = \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}-e^{-Ay}}{y}\,dy = \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\,dy - \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\,dy.$$
On a donc montré l'égalité :
$$(***)\qquad \int_\epsilon^A \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\,dy - \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\,dy.$$

2. On a $0\le \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\,dy \le \int_a^b \frac{e^{-Aa}}{a}\,dy = (b-a)\frac{e^{-Aa}}{a}$ et le membre de droite tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$. On a montré grâce au théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\,dy = 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-\epsilon b}}{y}\,dy \le \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\,dy \le \int_a^b \frac{e^{-\epsilon a}}{y}\,dy$. On en déduit l'encadrement $\displaystyle e^{-\epsilon b}\int_a^b \frac{1}{y}\,dy = e^{-\epsilon b}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \le \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\,dy \le e^{-\epsilon a}\int_a^b \frac{1}{y}\,dy = e^{-\epsilon a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Les membres de gauche et de droite de l'encadrement convergent vers $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ quand ϵ tend vers 0^+. Grâce au théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\,dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

3. Dans l'égalité $(***)$, on fait tendre ϵ vers 0^+ et A vers $+\infty$. Le membre de droite converge alors vers $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Donc le membre de gauche converge vers ce réel. On a montré que l'intégrale impropre $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ converge et vaut $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Exercice 9.(Fubini 3)
On note $D(\rho)$ le quart de disque fermé du plan $D(\rho)=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)/r\in[0,\rho],\theta\in[0,\pi/2]\}$.

1. La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le carré $[0,R]\times[0,R]$. On peut utiliser le théorème de Fubini et calculer
$$\begin{aligned}\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy &= \int_0^1 e^{-x^2}\left(\int_0^1 e^{-y^2}\,dy\right)dx\\ &= \left(\int_0^1 e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right) = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

2. Il est clair que $D(R)$ est inclus dans $[0,R]\times[0,R]$. On a donc $\displaystyle\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \geq \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$. Grâce au changement de variables en polaires, puis en utilisant le théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned}\iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \iint_{[0,R]\times[0,\pi/2]} e^{-r^2} r\,drd\theta \\ &= \int_0^R e^{-r^2} r\Big(\int_0^{\pi/2} d\theta\Big)\,dr = \frac{\pi}{2}\Big[\frac{e^{-r^2}}{-2}\Big]_0^R \\ &= \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).\end{aligned}$$

On en déduit $\displaystyle\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leq \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$.

3. Il est tout aussi clair que le carré $[0,R]\times[0,R]$ est inclus dans le quart de disque $D(\sqrt{2}R)$. On a donc $\displaystyle\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{D(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$. On calcule de la même manière que précédemment l'intégrale dans le membre de droite (en remplaçant R par $\sqrt{2}R$) et on obtient l'inégalité $\displaystyle\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$.

4. On a obtenu l'encadrement

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leq \Big(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\Big)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

Quand R tend vers $+\infty$, les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi}{4}$. Grâce au théorème des gendarmes, on a montré que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6. On note f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0)=1$. On pose alors, pour tout $x>0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt.$$

1. On définit l'application g de $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant $g(x,t) = f(t)e^{-xt}$.

   L'application g est clairement continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car les fonctions $(x,t)\mapsto f(t)$ et $(x,t)\mapsto e^{-xt}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

   Pour tout $(x,t)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a $|f(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt}$ car $|\sin(t)|\leq|t|$ et donc $|f(t)|\leq 1$. Or l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ est convergente du fait que x est >0. Donc, par comparaison, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ converge (absolument). Donc, pour tout $x>0$, $F(x)$ est un réel et F est bien définie sur $]0,+\infty[$.

   Commentaire : On rappelle pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge si $x>0$. Soit $A>0$, on a

$$\int_0^A e^{-xt}\,dt = \Big[\frac{e^{-xt}}{-x}\Big]_0^A = \frac{1-e^{-xA}}{x} \to \frac{1}{x} \text{ quand } A\to+\infty$$

Montrons maintenant que F est continue sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. On fixe donc $a > 0$. Pour tout $(x, t) \in]a, +\infty[\times [0, +\infty[$, on a $|f(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$. La fonction majorante $t \mapsto e^{-at}$ est indépendante de x, continue (en t), positive et son intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ est convergente. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique et dit que F est continue sur $]a, +\infty[$. Cela pour tout $a > 0$, donc F est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Il est clair que g admet des dérivées partielles $\partial_x g$ en tout point (x, t) de $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et $\partial_x g(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = -\sin(t)e^{-xt}$ (on distingue les cas $t \neq 0$ et $t = 0$).

   On voit que $(x, t) \mapsto \partial_x g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

   On fixe $a > 0$. Pour tout $(x, t) \in]a, +\infty[\times [0, +\infty[$, on a $|\partial_x g(x, t)| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$. La fonction majorante $t \mapsto e^{-at}$ est indépendante de x, continue (en t), positive et son intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ est convergente. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre s'applique et dit que F est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \partial_x g(x, t)\, dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\, dt$ pour tout $x \in]a, +\infty[$.

   Cela pour tout $a > 0$, donc F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\, dt.$$

3. On calcule pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\Im\Big(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt}\, dt\Big) \\
&= -\Im\Big(\lim_{A \to +\infty} \Big[\frac{e^{(i-x)t}}{i - x}\Big]_0^A\Big) \\
&= -\Im\Big(\frac{-1}{i - x}\Big) = \frac{-1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

4. En intégrant cette égalité, on en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = C - \arctan(x)$.

   Mais on sait que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$. On fait tendre x vers $+\infty$ et, par comparaison, on obtient $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$. Par ailleurs, on a $\lim_{x \to +\infty} F(x) = C - \pi/2$. On en déduit $C = \pi/2$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan(1/x).$$

   En particulier, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t}\, dt = F(1) = \arctan(1) = \pi/4$.