Planche 9

Changer de bases, sans les oublier

Exercice 93 ().
Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que la famille $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ est liée.
3. En déduire, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, qu'il existe un polynôme annulateur de A.

Correction

1. *On a* $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.
2. *La famille* $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ *possède* $n^2 + 1$ *vecteurs, dans un espace de dimension* n^2*, donc par conséquence du lemme de Steinitz elle est liée (trop de vecteurs pour être libre).*
3. *Puisque la famille ci-dessus est liée on sait qu'il existe des coefficients* λ_i *pas tous égaux à 0 tels que*
$$I_n + \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A^i = 0$$
Mézalor, le polynôme $P(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i X^i$ *est annulateur de* A*. Il existe donc bien toujours un polynôme annulateur.*

Exercice 94 ().

1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Montrer qu'elle ne peut pas être surjective.
2. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Montrer qu'elle ne peut pas être injective.
3. Soit E un espace vectoriel différent de $\{0\}$ et soit $u : \mathbb{R} \to E$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $u(x) \neq 0$. Montrer que $\operatorname{rang}(u) = 1$ et que u est injective.
4. Soit E un espace vectoriel différent de $\{0\}$ et soit $u : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $u(x) \neq 0$. Montrer que u est surjective.

Correction

1. *D'après le théorème du rang, on a :*
$$\operatorname{rang}(u) = 2 - \dim \ker u$$
En particulier,
$$\operatorname{rang}(u) \leq 2 < 3,$$
donc u *ne peut pas être surjective.*

2. *D'après le théorème du rang, on a :*

$$\mathrm{rang}(u) = 3 - \dim\ker u$$

ou encore :

$$\dim\ker u = 3 - \mathrm{rang}(u)$$

Or, puisque $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$, *on sait que* $\mathrm{rg}(u) \leq 2$. *Et donc*

$$\dim\ker u \geq 1 > 0,$$

donc u ne peut pas être injective.

3. *D'une part, il existe un élément non nul dans* $\mathrm{Im}(u)$, *donc* $\mathrm{Im}(u) \neq 0$ *et donc* $\dim(\mathrm{Im}(u)) \neq 0$, *et donc* $\mathrm{rg}(u) \geq 1$.
   D'autre part d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}) = \dim(\ker u) + \mathrm{rg}(u)$$

   donc $1 = \dim(\ker u) + \mathrm{rg}(u)$ *et donc* $\mathrm{rg}(u) = 1 - \dim(\ker u) \leq 1$.
   Ainsi la seule possibilité est $\mathrm{rg}(u) = 1$, *et donc d'après le théorème du rang,* $\dim(\ker u) = 0$ *et donc u est injective.*

4. *Comme précédemment, on a* $\mathrm{rg}(u) \geq 1$. *Or* $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}$ *donc on a aussi* $\mathrm{rg}(u) \leq 1$.
   Ainsi, $\mathrm{rg}(u) = 1$ *et donc pas inclusion et égalité des dimensions on a* $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$, *c'est-à-dire que u est surjective.*

Exercice 95 ().

1. Déterminer dans chaque cas ci-dessous les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, en vérifiant au préalable que $\mathcal{B}'$ est une base :
   (a) $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

   (b) $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et

$$\mathcal{B}' = (X - 1, X + 1, X^2 + X + 1)$$

   (c) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3, et $\mathcal{B}' = (e_3, e_2 + e_1, e_2 - e_3)$

2. À l'aide des matrices de passage calculées précédemment, déterminer dans chaque cas les coordonnées du vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ correspondante :
   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   (b) X
   (c) $e_1 + e_2 + e_3$

Solution sans rédaction

À chaque fois la stratégie est la même :

- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *est facilement calculable car on remplit les colonnes avec la décomposition naturelle des vecteurs (car* $\mathcal{B}$ *est la base canonique)*
- *On vérifie que le déterminant de cette matrice est non nul (ce qui signifie que* $\mathcal{B}'$ *est bien une base)*
- *Pour calculer* $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$*, soit on inverse* $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *(ce qui demande un peut de dextérité), soit on exprime les vecteurs de* $\mathcal{B}$ *en fonction de ceux de* $\mathcal{B}'$*.*

1. *On obtient :*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Par exemple pour le calcul de la première colonne de $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$*, on cherche* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et en résolvant le système on trouve $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{1}{3}$.

2. *On obtient :*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *On obtient :*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 96 ().
On considère l'endomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M \end{array}$$

Déterminer dans l'ordre que vous souhaitez :

- La dimension de son noyau
- Son rang
- Une base de son noyau
- Une base de son image
- Si elle est injective et/ou surjective et/ou bijective

Correction

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. Alors* $M \in \ker(T)$ *si et seulement si*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 3a+9c & 3b+9d \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si $a = -3c$ *et* $b = -3d$*. Finalement les matrices du noyau de* T *sont donc les matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} -3c & -3d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\ker(T) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les deux matrices de cette famille ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\ker T$*.*
Donc $\dim(\ker(T)) = 2$*. Donc* T *n'est pas injective, et donc pas non plus surjective car pour un endomorphisme il y a équivalence entre injectivité et surjectivité.*
De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(T)) + \mathrm{rg}(T)$$

donc $4 = 2 + \mathrm{rg}(T)$ *et donc* $\mathrm{rg}(T) = 2$*.*
Ainsi $\mathrm{Im}(u)$ *est de dimension 2 donc il suffit de trouver deux matrices non colinéaires dans* $\mathrm{Im}(u)$*, elles formeront automatiquement une base. Calculons par exemple*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices images ne sont pas colinéaires, donc $\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\}$ *est une base de* $\mathrm{Im}(u)$*.*

Exercice 97 ().
On considère l'endomorphisme défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$v(P) = P(0)X^2 + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)$$

1. Calculer la matrice de v dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de v.

3. Calculer la matrice de v dans cette base et donner la relation liant cette matrice à la matrice de la question 1.

Solution sans rédaction

La matrice de v dans les bases canoniques est :

$$M_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

1 est donc valeur propre double et -1 valeur propre simple.
On trouve par exemple comme vecteurs propres de M_v :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont les coordonnées respectives des polynômes

$$X, 1+X^2, 1-X^2$$

Ainsi, $(X, 1+X^2, 1-X^2)$ forme une base de diagonalisation de v.

Exercice 98 ().
On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction

J'appelle à chaque fois, dans l'ordre, F et G les sev en jeu.

1. *Sans calcul, aucune chance puisque pour que $F+G=\mathbb{R}^4$ il faudrait déjà au moins 4 vecteurs lorsqu'on concatène des familles génératrices de F et G.*
2. *D'une part, $F+G \subset \mathbb{R}^4$. Calculons alors $\dim(F+G)$:*
   par concaténation, $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ forme une famille génératrice de $F+G$. Démontrons qu'elle est libre. Supposons que

$$xv_1 + yv_2 + zv_4 + tv_5 = 0$$

Alors en analysant chaque coordonnée on a le système suivant :

$$\begin{cases} x & & & = 0 \\ & & t & = 0 \\ & y & & = 0 \\ x & + z & + t & = 0 \end{cases}$$

d'où on tire immédiatement $x = y = z = t = 0$. Donc la famille est libre et est donc une base de $F + G$. Ainsi $\dim(F + G) = 4$ et donc par inclusion et égalité des dimensions :

$$F + G = \mathbb{R}^4$$

Il reste à montrer que la somme est directe.

Or, $\dim(F+G) = 4 = \dim(F)+\dim(G)$ ($\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 2$ car les familles génératrices données sont libres, donc des bases).

L'égalité $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ étant équivalente à dire que la somme est directe, on a bien la somme directe. Ainsi,

$$F \oplus G = \mathbb{R}^4$$

3. *On remarque que $v_5 = v_4 + v_3$ donc $v_5 \in G \cap F$. Donc G et F ne sont pas en somme directe, et donc pas supplémentaire.*
4. *On remarque que $v_5 = v_4 + v_3$ donc $v_4 = v_5 - v_3$ et donc $v_4 \in F \cap G$. Donc G et F ne sont pas en somme directe, et donc pas supplémentaire.*

Exercice 99 ().

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On considère l'application $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3)
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$
   (a) Démontrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E
   (b) Calculer la matrice M de T dans cette base.
   (c) Quelle est la matrice de passage P de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) ?
3. Quelle relation lie A, M et P ?

Correction

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ *et* $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

(a) Calculons la matrice formée des coordonnées de la famille (f_1, f_2, f_3) *dans la base* (e_1, e_2, e_3)*. D'après les expressions de* f_1, f_2 *et* f_3 *données dans l'énoncé, on obtient :*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, en développant par rapport à la première colonne :

$$\det(Q) = 1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

Ainsi P est inversible et donc (f_1, f_2, f_3) est bien une base de E.

(b) *Il s'agit d'exprimer $T(f_1)$, $T(f_2)$ et $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. On a par linéarité :*

$$T(f_1) = T(e_1) - T(e_3) = e_3 - e_3 = 0 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$$

Donc la première colonne de la matrice sera nulle.
Puis

$$T(f_2) = T(e_1) - T(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2 = 0f_1 + 1f_2 + 0f_3$$

Donc la deuxième colonne de la matrice sera $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

De même, on trouve que la troisième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *et donc :*

$$M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(c) *C'est exactement le calcul et la matrice de la question a), donc $P = Q$.*

3. *D'après la formule de changement de base, $M = P^{-1}AP$*

Exercice 100 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Cela signifie que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $f \circ f \circ f$ est l'endomorphisme nul.
On pose alors $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base ci-dessus
3. Calculer $\text{rang}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$
4. Calculer $\dim(\ker f)$ et une base de $\ker f$.
5. $\ker f$ et $\text{Im}\, f$ sont-ils en somme directe ?
6. Dans les questions 1 et 2, on dispose d'une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire. Peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de f serait diagonale ?

Correction

1. *La famille est de taille 3, qui est aussi la dimension de E, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Allons-y : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que*

$$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \lambda_3 f^2(x) = 0$$

En appliquant f, on obtient :

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \lambda_3 f^3(x) = 0$$

Or f^3 est l'application nulle donc

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = 0$$

Rebelotte, on obtient $\lambda_1 f^2(x) = 0$ et comme x a été bien choisi ($f^2(x) \neq 0$), on a $\lambda_1 = 0$. On réinjecte dans la dernière équation, ce qui permet de tirer $\lambda_2 = 0$, puis en réinjectant tout dans la première, $\lambda_3 = 0$. La famille est donc libre.

2. *On a : $f(x) = 0x + 1f(x) + 0f^2(x)$, $f(f(x)) = 0x + 0f(x) + 1f^2(x)$, et $f(f^2(x)) = 0$, d'où :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *On remarque immédiatement que les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Im}(M)$, donc $(f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisque ce sont les vecteurs représentés par ces coordonnées. Ainsi $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(M) = 2$.*

4. *Par théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$ donc $\dim \ker f = 1$. Or $f^2(x)$ est un élément non nul de $\ker f$ puisque $f(f^2(x)) = f^3(x)$ et que $f^3 = 0$. Donc $\{f^2(x)\}$ est une base de $\ker f$.*

5. *Comme $f^2(x) = f(f(x))$, on a $f^2(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $f^2(x) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ et donc*

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq 0$$

Donc ces deux espaces ne sont pas en somme directe.

6. *Trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale revient à dire que la matrice M est diagonalisable. Or M n'a qu'une valeur propre (triple) 0. Mais la dimension de l'espace propre associé est*

$$\dim(\ker M) = 1 \neq 3$$

Donc M n'est pas diagonalisable et donc il n'existe pas de base de E formée de vecteurs propres de f.

Exercice 101 (Démonstration de la formule de Grassmann). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels (de dimension finie) d'un espace vectoriel E Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1. On définit l'ensemble $F \times G$ par :

$$F \times G = \{(f, g) : f \in F, g \in G\}$$

Montrer que $F \times G$ est un sous-espace vectoriel de E^2.

2. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des vecteurs formant une base de F et $g_1, \ldots, g_q$ formant une base de

G. Montrer qu'alors la famille $(f_1, 0), (f_2, 0), \ldots, (f_p, 0), (0, g_1), \ldots, (0, g_q)$ est une base de $F \times G$.

3. En déduire la dimension de $F \times G$.
4. On considère les applications linéaires suivantes

$$u : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & F + G \\ (f, g) & \mapsto & f + g \end{array}$$

et

$$v : \begin{array}{ccc} F \cap G & \to & F \times G \\ f & \mapsto & (f, -f) \end{array}$$

Montrer que $\operatorname{Im} v = \ker u$.

5. En déduire que $\dim F \cap G = \dim \ker(u)$.
6. À l'aide du théorème du rang et des trois questions précédentes, démontrer la formule de Grassmann.

Correction

1. *D'une part, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, un couple $(f, g) \in F \times G$ est un couples d'éléments de E, et c'est donc un élément de E^2. Ainsi $F \times G \subset E$.*
D'autre part, toujours car F et G sont des sous-espaces vectoriels, $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Donc $(0_E, 0_E) \in F \times G$.
Enfin, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(f_1, g_1) \in F \times G$ et $(f_2, g_2) \in F \times G$. Montrons que

$$\lambda(f_1, g_1) + (f_2, g_2) \in F \times G$$

On a $\lambda(f_1, g_1)+(f_2, g_2) = (\lambda f_1+f_2, \lambda g_1+g_2)$. Or, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire, et donc

$$\lambda f_1 + f_2 \in F, \qquad \lambda g_1 + g_2 \in G$$

Ainsi, $(\lambda f_1 + f_2, \lambda g_1 + g_2) \in F \times G$, et donc $\lambda(f_1, g_1) + (f_2, g_2) \in F \times G$. $F \times G$ est donc un sous-espace vectoriel.

2. *Il faut montrer que la famille est libre et génératrice (ici on ne peut pas utiliser d'argument de dimension puisqu'on ne connaît pas la dimension de $F \times G$).*
Montrons tout d'abord que la famille est libre. Supposons donc qu'on a la combinaison linéaire nulle suivante :

$$\lambda_1(f_1, 0) + \lambda_2(f_2, 0) + \cdots + \lambda_p(f_p, 0) + \mu_1(0, g_1) + \cdots + \mu_q(0, g_q) = (0, 0)$$

Alors on a : (première coordonnée)

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p = 0$$

et (deuxième coordonnée)

$$\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots + \mu_p g_p = 0$$

Or $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F, donc en particulier c'est une famille libre. Donc nécessairement

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

De même, $(g_1, \dots, g_q)$ est une base de G, et donc de la même manière tous les μ_i sont nuls.

Ainsi, tous les coefficients de la combinaison linéaire initiale sont nulles, et donc la famille considérée est libre.

Démontrons maintenant qu'elle est génératrice. Soit $v \in F \times G$. Il existe alors $f \in F$ et $g \in G$ tels que $v = (f, g)$. On peut de plus écrire, en décomposant f et g dans les bases respectives de F et G :

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, \qquad g = \sum_{i=1}^{q} \beta_i g_i$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v &= (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, \sum_{i=1}^{q} \beta_i g_i) \\ &= (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, 0) + (0, \sum_{i=1}^{q} \beta_i g_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (f_i, 0) + \sum_{i=1}^{q} \beta_i (0, g_i) \end{aligned}$$

On a donc une expression de v sous forme de combinaison linéaire d'éléments de la famille donnée. Puisque v représente un élément arbitraire de $F \times G$, cette famille est génératrice de $F \times G$.

Ainsi, c'est bien une base de $F \times G$.

3. *La famille de la question précédente possède $p+q$ éléments, c'est-à-dire $\dim F + \dim G$ éléments. Puisque c'est une base de $F \times G$, ce nombre correspond à la dimension de $F \times G$. Ainsi :*
$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$$
4. *Montrons que $\operatorname{Im} v = \ker u$. Ici on n'a pas vraiment d'information sur les dimensions de ces espaces, on va donc procéder par double inclusion.*

   Démontrons que $\operatorname{Im} v \subset \ker u$:

   soit donc $x \in \operatorname{Im} v$. Alors il existe $f \in F \cap G$ tel que $x = (f, -f)$. Alors
$$u(x) = u(f, -f) = f + (-f) = 0$$
   Ce qui signifie que $x \in \ker u$. D'où l'inclusion.

   Démontrons maintenant que $\ker u \subset \operatorname{Im} v$:

   soit donc $(f, g) \in \ker u$. On a alors $u(f, g) = f + g = 0$. Donc $g = -f$ et donc $(f, g) = (f, -f) = v(f)$, qui est bien un élément de $\operatorname{Im} v$. D'où la seconde inclusion. Ainsi, par double inclusion, on a l'égalité voulue.
5. *D'après la question précédente, on a donc*
$$\dim(\ker u) = \mathit{rang}(v)$$

Or, d'après le théorème du rang,

$$\textit{rang}(v) = \dim(F \cap G) - \dim(\ker v)$$

Or si $v(f) = (0,0)$ alors $(f,-f) = (0,0$ et donc $f = 0$. Donc $\ker v = \{0\}$ et $\dim(\ker v) = 0$.
On a donc $\textit{rang}(v) = \dim(F \cap G)$ et ainsi :

$$\dim(\ker u) = \dim(F \cap G)$$

6. *Appliquons le théorème du rang à l'application u. On a :*

$$\textit{rang}(u) = \dim(F \times G) - \dim(\ker u)$$

Donc d'après la question précédente,

$$\textit{rang}(u) = \dim(F \times G) - \dim(F \cap G)$$

Et d'après la question 3,

$$\textit{rang}(u) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Enfin, u est surjective : en effet, soit $x \in F + G$, alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$, et donc $x = u(f,g)$ et donc x est bien dans l'image de u. Tout élément de $F + G$ est donc atteint.
Donc $\textit{rang}(u) = \dim(F+G)$ et on obtient donc finalement la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Exercice 102 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u.
On admet que le sous-espace propre E_λ admet un supplémentaire F dans E.
À l'aide d'une matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = E_\lambda \oplus F$, montrer qu'on a

$$\dim E_\lambda \leq \mu(\lambda)$$

où $\mu(\lambda)$ désigne la multiplicité algébrique de λ (multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique).

Exercice 103 (). *(suite de l'exercice précédent)*
On se place dans un espace vectoriel E de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit p le nombre de valeurs propres de u, que l'on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. On rappelle alors que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.
On pose F un sous-espace vectoriel tel que

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} \oplus F$$

1. Écrire la forme qu'à la matrice de u dans une base de E adaptée à la décomposition ci-dessus.
2. (a) Montrer en utilisant seulement la décomposition de l'énoncé qu'on a toujours

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) \leq n$$

(b) Montrer alors que si u admet n valeurs propres distinctes, alors on peut trouver une base de E formée par des vecteurs propres de u.

(c) Écrire la forme qu'a la matrice de u dans cette base

3. (a) Que vaut $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mu(\lambda)$?

(b) En déduire que si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$, alors on peut trouver une base de E formée de vecteurs propres de u.