Planche 9

Changer de bases, sans les oublier

Exercice 93 ().
Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que la famille $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ est liée.
3. En déduire, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, qu'il existe un polynôme annulateur de A.

Exercice 94 ().

1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Montrer qu'elle ne peut pas être surjective.
2. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Montrer qu'elle ne peut pas être injective.
3. Soit E un espace vectoriel différent de $\{0\}$ et soit $u : \mathbb{R} \to E$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $u(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{rang}(u) = 1$ et que u est injective.
4. Soit E un espace vectoriel différent de $\{0\}$ et soit $u : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $u(x) \neq 0$. Montrer que u est surjective.

Exercice 95 ().

1. Déterminer dans chaque cas ci-dessous les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, en vérifiant au préalable que $\mathcal{B}'$ est une base :
   (a) $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et
   $$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$
   (b) $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et
   $$\mathcal{B}' = (X-1, X+1, X^2+X+1)$$
   (c) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3, et $\mathcal{B}' = (e_3, e_2 + e_1, e_2 - e_3)$
2. À l'aide des matrices de passage calculées précédemment, déterminer dans chaque cas les coordonnées du vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ correspondante :
   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   (b) X
   (c) $e_1 + e_2 + e_3$

Exercice 96 ().
On considère l'endomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M \end{array}$$

Déterminer dans l'ordre que vous souhaitez :

- La dimension de son noyau
- Son rang
- Une base de son noyau
- Une base de son image
- Si elle est injective et/ou surjective et/ou bijective

Exercice 97 ().
On considère l'endomorphisme défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$v(P) = P(0)X^2 + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)$$

1. Calculer la matrice de v dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de v.
3. Calculer la matrice de v dans cette base et donner la relation liant cette matrice à la matrice de la question 1.

Exercice 98 ().
On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 99 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On considère l'application $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3)
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$
   (a) Démontrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E
   (b) Calculer la matrice M de T dans cette base.
   (c) Quelle est la matrice de passage P de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) ?
3. Quelle relation lie A, M et P ?

Exercice 100 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Cela signifie que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $f \circ f \circ f$ est l'endomorphisme nul.
On pose alors $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base ci-dessus
3. Calculer $\operatorname{rang}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$
4. Calculer $\dim(\ker f)$ et une base de $\ker f$.
5. $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils en somme directe ?
6. Dans les questions 1 et 2, on dispose d'une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire. Peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de f serait diagonale ?

Exercice 101 (Démonstration de la formule de Grassmann). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels (de dimension finie) d'un espace vectoriel E Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1. On définit l'ensemble $F \times G$ par :
$$F \times G = \{(f,g) : f \in F, g \in G\}$$
Montrer que $F \times G$ est un sous-espace vectoriel de E^2.
2. Soient $f_1, \dots, f_p$ des vecteurs formant une base de F et $g_1, \dots, g_q$ formant une base de G. Montrer qu'alors la famille $(f_1, 0), (f_2, 0), \dots, (f_p, 0), (0, g_1), \dots, (0, g_q)$ est une base de $F \times G$.
3. En déduire la dimension de $F \times G$.
4. On considère les applications linéaires suivantes
$$\begin{array}{rccc} u: & F \times G & \to & F+G \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccc} v: & F \cap G & \to & F \times G \\ & f & \mapsto & (f,-f) \end{array}$$
Montrer que $\operatorname{Im} v = \ker u$.
5. En déduire que $\dim F \cap G = \dim \ker(u)$.
6. À l'aide du théorème du rang et des trois questions précédentes, démontrer la formule de Grassmann.

Exercice 102 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u.
On admet que le sous-espace propre E_λ admet un supplémentaire F dans E.
À l'aide d'une matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = E_\lambda \oplus F$, montrer qu'on a

$$\dim E_\lambda \leq \mu(\lambda)$$

où $\mu(\lambda)$ désigne la multiplicité algébrique de λ (multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique).

Exercice 103 (). *(suite de l'exercice précédent)*
On se place dans un espace vectoriel E de dimension n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit p le nombre de valeurs propres de u, que l'on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. On rappelle alors que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.
On pose F un sous-espace vectoriel tel que

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} \oplus F$$

1. Écrire la forme qu'à la matrice de u dans une base de E adaptée à la décomposition ci-dessus.
2. (a) Montrer en utilisant seulement la décomposition de l'énoncé qu'on a toujours

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) \leq n$$

   (b) Montrer alors que si u admet n valeurs propres distinctes, alors on peut trouver une base de E formée par des vecteurs propres de u.

   (c) Écrire la forme qu'a la matrice de u dans cette base
3. (a) Que vaut $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mu(\lambda)$?

   (b) En déduire que si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$, alors on peut trouver une base de E formée de vecteurs propres de u.