Bilan feuille 9

Diagonaliser un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$

$\Leftrightarrow$ Trouver une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u

Dans ce cas,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(v_1) & \cdots & u(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

En pratique :

① on calcule M_{can} (matrice de u dans la base canonique)

② On diagonalise M_{can}

→ valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

→ vecteurs propres $v_1, v_2, \dots$

③ On traduit $v_1, v_2, \dots$ en vecteurs de E et on obtient alors la base de vecteurs propres.

polynômes, ...

(exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 + X^2$)

Critères de diagonalisabilité :

- Si les valeurs propres sont simples, u est diagonalisable
  ↳ une seule fois racine dans le polynôme carac (multiplicité algébrique $= 1$)

* u est diagonalisable ssi pour tout $\lambda \in Sp(u)$:

$$\underbrace{\mu(\lambda)}_{\text{multiplicité algébrique}} = \underbrace{\dim(E_\lambda)}_{\text{dimension de l'espace propre}}$$

multiplicité algébrique (nombre de fois que λ est racine dans le polynôme carac)

dimension de l'espace propre ($\underbrace{\dim(\ker(A - \lambda I))}$)

→ résoudre le système linéaire

ou

→ on calcule le rang puis on applique le thm du rang.

Formule de Grassmann

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Conséquences

- $F \cap G = \{0\} \iff \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$
- F et G supplémentaires dans E ssi :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

- Pour trouver une base de $F \cap G$:
  - On calcule $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F+G)$

- On calcule $\dim(F \cap G)$
  (formule de Grassmann)

on concatène des familles génératrices de F et G et on enlève les vecteurs inutiles

- On trouve à l'oeil des vecteurs de $F \cap G$ (autant que nécessaire)