# Feuille d'exercices 6. Corrigé

Polynômes

**Exercice 6.1. Racines d'un polynôme**

Soit $P(X) = 2X^3 + 7X^2 + 7X + 2$. Vérifier que $-2$ est une racine de $P$, en déduire toutes les racines complexes de $P$, et écrire $P$ sous forme scindée.

**Réponse :** Il suffit de calculer $P(-2) = 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 = 0$ : $-2$ est une racine de $P$.

On sait alors par le cours que $X + 2$ divise $P(X)$, on peut trouver le quotient en posant la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 2X^3 & + & 7X^2 & + & 7X & + & 2 & X+2 \\
\cline{9-9}
- & (2X^3 & + & 4X^2) & & & & & 2X^2+3X+1 \\
\cline{2-8}
 & & & 3X^2 & + & 7X & + & 2 & \\
 & & - & (3X^2 & + & 6X) & & & \\
\cline{4-8}
 & & & & & X & + & 2 & \\
 & & & & - & (X & + & 2) & \\
\cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi le quotient est $Q(X) = 2X^2 + 3X + 1$, on trouve ses racines en calculant son discriminant $\Delta = 1$, et ses racines sont $\frac{-3\pm1}{4}$, c'est-à-dire $-1$ et $-1/2$. Comme $Q$ a pour coefficient dominant 2, $Q(X) = 2(X + 1)(X + 1/2)$, et $P(X) = 2(X + 2)(X + 1)(X + 1/2)$.

**Exercice 6.2. Racines doubles**

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $P(X) = 4X^2 + (a-1)X + 1$. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $P$ n'a qu'une racine double, et calculer cette racine.

**Réponse :** Comme le nombre de racines dans $\mathbb{C}$ d'un polynôme de degré 2, comptées avec multiplicité, est 2, $P$ a soit deux racines simples, soit une racine double, et on sait que $P$ n'a qu'une racine exactement quand son discriminant $\Delta$ vaut 0. Ici, la condition est donc $\Delta = (a-1)^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire $a - 1 = \pm4$, $a = 5$ ou $a = -3$. Dans ce cas, l'unique racine double de $P$ est $\frac{1-a}{8}$.

**Exercice 6.3. Racines de ploynômes à coefficients complexes**

Trouver les racines des polynômes $P(X) = X^2 + 2iX - 2$ et $Q(X) = X^2 + 2X + 1 - 2i$.

**Exercice 6.4. Division euclidienne**

**1.** Trouver les valeurs de $a$ pour lesquelles le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 - 2aX + 2$.

**2.** Faire la division euclidienne de $X^3 + aX^2 - 2aX + 2$ par $X - 1$ et retrouver le résultat de la question 1.

**Exercice 6.5. Factorisation de polynômes**

Soit $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 1$.

**1.** Trouver une racine imaginaire pure de $P$.

**2.** En déduire la factorisation de $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 6.6. Factorisation de polynômes**
Soit $P(X) = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24$.
**1.** Trouver une racine évidente de $P$, ainsi que sa multiplicité.

**2.** En déduire la factorisation de $P$ en facteurs irréductibles.

**Exercice 6.7. Factorisation de polynômes**
**1.** Déterminer les racines réelles du polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.

**2.** Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 6.8. Racines complexes et cosinus**
Soit $P(X) = X^5 - 1$.
**1.** Quel est le quotient de la division de $P(X)$ par $X - 1$ ?

**2.** Donner les racines complexes de $P$ sous forme trigonométrique et les représenter graphiquement dans le plan complexe.
**3.** En déduire que la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$P(X) = (X - 1)(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1).$$

**4.** Sans utiliser la question précédente, montrer que $(X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ssi $a$ et $b$ sont solutions du système $\begin{cases} a + b = 1 \\ ab + 1 = 0 \end{cases}$.
**5.** Résoudre le système précédent.

**6.** En déduire les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.

**Réponse :** 1. En exploitant des calculs déjà vus ou en faisant la division euclidienne, on trouve :

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

2. Par définition, les racines de $P$ sont les racines cinquièmes de l'unité, qui s'écrivent $e^{2ik\pi/5}$, pour $k$ entier variant de 0 à 4. Elles forment le pentagone régulier sur le cercle trigonométrique, avec $I$ d'affixe 1 comme l'un des sommets.
3. Comme le coefficient dominant de $P$ est 1 et qu'on connait ses racines, on peut écrire :

$$P(X) = (X - 1)(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5}).$$

Or $e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}$ est le conjugué de $e^{2i\pi/5}$, et on trouve en regroupant

$$(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{2i\pi/5})X + |e^{2i\pi/5}| = X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1.$$

De la même façon, on trouve

$$(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{4i\pi/5})X + |e^{4i\pi/5}| = X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1,$$

ce qui donne la factorisation demandée dans $\mathbb{R}[X]$ (et les deux polynômes de degré 2 qui apparaissent sont bien irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puisque leurs racines sont complexes non réelles).
4. On développe :

$$(X^2+aX+1)(X^2+bX+1) = X^4+(a+b)X^3+(2+ab)X^2+(a+b)X+1.$$

Donc par identification, ce polynôme vaut $X^4+X^3+X^2+X+1$ ssi $\begin{cases} a+b=1 \\ ab+1=0 \end{cases}$.

5.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a(1-a)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^2-a-1=0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc : $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b=1-a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d'une part et $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b=1-a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'autre part.
6. On vient de voir que l'unique factorisation de $X^4+X^3+X^2+X+1$ en utilisant des polynômes de cette forme est, à échange des facteurs près :

$$X^4+X^3+X^2+X+1 = (X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1)(X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1).$$

Or, en divisant par $X-1$ la factorisation de la question 3, on trouve

$$X^4+X^3+X^2+X+1 = (X^2-2\cos(2\pi/5)X+1)(X^2-2\cos(4\pi/5)X+1).$$

On peut donc identifier ces deux factorisations, ce qui nous donne $\begin{cases} \cos(2\pi/5) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0 \\ \cos(4\pi/5) = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos(2\pi/5) = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} > 0 \\ \cos(4\pi/5) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0 \end{cases}$. Or, comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2 < 4\pi/5 < \pi$, on sait que $\cos(2\pi/5) > 0$ et $\cos(4\pi/5) < 0$, donc les valeurs sont $\begin{cases} \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos(4\pi/5) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$.

**Exercice 6.9. Fonctions polynomiales**

On sait d'après les cours d'analyse que si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale non constante, telle que $P'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.
**1.** Soit $P(X) = X^3+2X^2+7X+5$.

**a.** Montrer que $P$ admet une unique racine réelle et justifier que c'est une racine simple.
**b.** Montrer que $P$ admet deux racines complexes distinctes non réelles.
**2.** Soit $P(X) = X^3-3X^2+3X-1$.

**a.** Montrer que $P$ admet une unique racine réelle.
**b.** Trouver la valeur de cette racine et donner sa multiplicité.
**c.** Est-ce que $P$ admet des racines complexes non réelles ?

**Exercice 6.10. Reste d'une division euclidienne**

On fixe un entier $n \geq 1$ et $P_1(X) = X^n$.
**1.** Soit $P_2(X) = X^2-3X+2$, on écrit la division euclidienne $P_1 = P_2Q + R$ et on cherche à déterminer le reste $R$.

**a.** Trouver les racines de $P_2$.
**b.** Justifier que le reste $R(X)$ s'écrit sous la forme $R(X) = aX + b$.
**c.** En calculant les valeurs de $P_1$ en des points bien choisis, montrer que $a$ et $b$ sont les solutions du système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases}$.
**d.** Résoudre le système précédent et écrire le reste $R(X)$.
**e.** Vérifier le résultat pour $n = 3$ en effectuant la division euclidienne.
**2.** Soit $P_2(X) = (X-1)^2$, on écrit la division euclidienne $P_1 = P_2Q + R$ et on cherche à déterminer le reste $R$.
**a.** Justifier que le reste $R(X)$ s'écrit sous la forme $R(X) = aX + b$.
**b.** Exprimer $P_1'$ en fonction de $Q$, $R$ et de leurs dérivées.
**c.** Montrer que $a$ et $b$ sont les solutions du système $\begin{cases} a+b=1 \\ a=n \end{cases}$.
**d.** Résoudre le système précédent et écrire le reste $R(X)$.
**e.** Vérifier le résultat pour $n = 3$ en effectuant la division euclidienne.
**Réponse :** 1.a. On trouve facilement que les racines de $P$ sont 1 et 2.
b. Par définition de la division euclidienne, le reste $R$ doit être de degré strictement inférieur à celui de $P_2$, c'est-à-dire 2, donc $R$ est de degré $\leq 1$ et il peut s'écrire $R(X) = aX + b$.
c. On a l'égalité

$$X^n = (X-1)(X-2)Q(X) + aX + b.$$

On exploite le fait que $(X-1)(X-2)Q(X)$ s'annule en 1 et en 2, donc en prenant la valeur en ces points, on trouve $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases}$.
d.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2^n-1 & (L_2-L_1) \\ b=2-2^n & (2L_1-L_2) \end{cases}$$

Donc $R(X) = (2^n-1)X + 2 - 2^n$.
e. Posons la division euclidiennne de $X^3$ par $X^2 - 3X + 2$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} & X^3 & & & & & & X^2-3X+2 \\ \cline{8-8} - & (X^3 & - & 3X^2 & + & 2X) & & X+3 \\ \cline{2-6} & & & 3X^2 & - & 2X & & \\ - & & ( & 3X^2 & - & 9X & +\ 6) & \\ \cline{3-7} & & & & & 7X & -\ 6 & \end{array}$$

Donc $R(X) = 7X - 6$, comme prévu.
2.a. C'est le même argument que précédemment, puisque $P_2$ est de degré 2.
b. $P_1 = P_2Q + R$ donc $P_1' = P_2'Q + P_2Q' + R'$.
c. On prend les valeurs en 1 dans les deux égalités ci-dessus, avec $P_1(X) = X^n$, $P_1'(X) = nX^{n-1}$, $R(X) = aX + b$, $R'(X) = a$, et en exploitant le fait que $P_2(1) = P_2'(1) = 0$ car 1 est une racine double de $P_2$ :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a=n \end{cases}$$

d. On obtient immédiatement $a = n$ et $b = 1 - n$, donc $R(X) = nX + (1 - n)$.
e. Posons la division euclidiennne de $X^3$ par $(X-1)^2$, c'est-à-dire $X^2 - 2X + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & & & & & & & X^2 - 2X + 1 \\
\cline{9-9}
- & (X^3 & - & 2X^2 & + & X) & & & X + 2 \\
\cline{2-7}
 & & & 2X^2 & - & X & & & \\
- & ( & & 2X^2 & - & 4X & + & 2) & \\
\cline{2-8}
 & & & & & 3X & - & 2 &
\end{array}
$$

Donc $R(X) = 3X - 2$, comme prévu.