L2 S3 **Université Paris Sud**
Meu 204 **2023-2024**

Examen MEU 204

Ni les calculatrices, ni les documents, ni les téléphones portables ne sont autorisés.

Durée 2 heures

Exercice 1 :

1. Enoncer le corollaire du petit théorème de Fermat.
2. Montrer que le nombre $2^{70} + 3^{70}$ est un multiple de 13.

Exercice 2 : Soit I un idéal d'un anneau A. On suppose que I contient un élément inversible.

1. Montrer que $I = A$.
2. Soit f un morphisme d'anneau , $f : K \to B$ avec K est un corps et B un anneau , en déduire que f est injectif.

Exercice 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{31}x + \bar{8} = \bar{0}$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{89}x = \bar{2}$

Exercice 4 : On pose $A = \mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$.

1. Quel est le nombre d'éléments du groupe A^*?
2. On pose $a = \bar{5}$, On a $a^3 = \overline{17}, a^6 = \overline{19}$. Calculer a^9 et en déduire que A^* est cyclique .[Justifier votre réponse].
3. Résoudre dans A les équations suivantes : a) $\overline{19}x = \bar{1}$ et b) $x^3 = \bar{1}$

Exercice 5 : L'objet de cet exercice est de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 8.

1. Soit p un nombre premier impair , on suppose qu'il existe un entier a qui vérifie $a^2 + 4 \equiv 0[p]$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier b tel que $2b \equiv 1[p]$. **TSVP**

(b) Montrer que $(ba)^2 + 1 \equiv 0[p]$.

(c) En déduire que $p \equiv 1[4]$.

2. On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 5 modulo 8. Soit $E = \{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ l'ensemble de ces nombres . Montrer que E est non vide .

3. On pose $P = \prod_{i=0}^{n} p_i, Q = P^2 + 4$. Soit q un diviseur premier de Q, montrer que $q \neq 2$ et $q \notin E_n$.

4. Montrer que $q \equiv 1[4]$. Utiliser la question 1.

5. Montrer que $Q \equiv 5[8]$.

6. En déduire qu'il existe un diviseur premier de Q congru à 5 modulo 8.

7. Conclure .

Exercice 6 : [**Facultatif**] : Trouver une équation du second degré dans $\mathbb{Z}$: $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des entiers telle que :

Cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$ et pour chaque nombre p premier , l'équation $\bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c} = 0$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercice 7 : [**Facultatif**]: Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée avec $a_{ij} \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det M$.