Université Paris Saclay | | **MDD 102**
L1S1 | | **Algèbre**

Feuille d'exercices 3. Corrigé

Relations sur un ensemble

Exercice 3.1. Classes d'équivalence

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation : $(x, y) \sim (x', y')$ ssi $xy = x'y'$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, representer graphiquement les classes d'équivalence des éléments $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

Exercice 3.2. Représentants

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $x \sim y$ ssi $|x| = |y|$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, déterminer le cardinal de la classe d'équivalence $\overline{x}$.

3. Soit l'application canonique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$. Montrer que $f_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}/\sim$ est une bijection.

Exercice 3.3. Relation d'équivalence

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $x \sim y$ ssi $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Trouver une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \sim y$ ssi $f(x) = f(y)$.

2. En déduire que $\sim$ est une relation d'équivalence.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x.

Exercice 3.4. Congruence modulo 2

On considère la relation d'équivalence $x \equiv y$ [2] sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient correspondant.

1. Montrer que si $x \equiv y$ [2], alors $(-1)^x = (-1)^y$.

2. En déduire qu'il existe une application $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \; f(\overline{n}) = (-1)^n$$

3. Rappeler quels sont les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donner leurs images par l'application f.

Exercice 3.5. Congruence et ensembles quotients

Pour un entier $d \geq 1$, on note $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient pour la relation d'équivalence $x \equiv y$ [d] sur $\mathbb{Z}$, et $p_d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'application canonique.

1. Soient deux entiers relatifs x et y. Montrer que si $x \equiv y$ [6], alors $x \equiv y$ [3].

2. En déduire qu'il existe une application $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que $p_3 = f \circ p_6$.

3. Montrer que l'application f est surjective.

4. Soient les classes $\overline{0}$ et $\overline{3}$ modulo 6. Comparer $f(\overline{0})$ et $f(\overline{3})$. Est-ce que f est injective ?

Réponse : 1. Si $x \equiv y$ [6], on trouve $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 6k$, ce qui peut aussi s'écrire $y = x + 3(2k)$, et nous donne donc que $x \equiv y$ [3].

2. Par définition de l'application canonique p_3, pour x et y dans $\mathbb{Z}$, $x \equiv y$ [3] ssi $p_3(x) = p_3(y)$. On vient donc de montrer que $x \equiv y$ [6] implique $p_3(x) = p_3(y)$; en appliquant le théorème du cours, on en déduit qu'il existe une application $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que $p_3 = f \circ p_6$.
3. Par définition, tout élément de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $p_3(x)$ pour une certain $x \in \mathbb{Z}$ (c'est la classe de x modulo 3). Or $p_3(x) = f(p_6(x))$, donc tout élément de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est dans $f(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$: f est surjective.
4. On regarde les classes de 0 et de 3 modulo 6, c'est-à-dire $p_6(0)$ et $p_6(3)$. Par construction de f, $f(p_6(0)) = p_3(0)$ et $f(p_6(3)) = p_3(3)$. Or $p_3(0) = p_3(3)$ puisque $0 \equiv 3$ [3], donc $f(p_6(0)) = f(p_6(3))$. Mais $p_6(0) \neq p_6(3)$ puisque 6 ne divise pas $3 - 0$. On a donc montré que f n'est pas injective : deux éléments distincts sont envoyés sur le même élément.

Exercice 3.6. Partition

Soit X un ensemble non-vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de X indexée par un ensemble I (c'est-à-dire que pour tout $i \in I$, A_i est un sous-ensemble de X). On suppose que cette famille forme une partition de X, c'est-à-dire que :

— pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
— pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$
— pour tous i et j dans I, si $i \neq j$ alors A_i et A_j sont disjoints

On définit une relation R sur X par :

$$xRy \text{ ssi } \exists i \in I \ (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur X.

2. Montrer que les classes d'équivalence pour R sont exactement les sous-ensembles A_i.

Réponse : 1. R est réflexive : soit $x \in X$, d'après la condition 2, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$, ce qu'on peut aussi écrire $\exists i \in I$ ($x \in A_i$ et $x \in A_i$). Donc xRx est vrai.
R est symétrique : si xRy, alors $\exists i \in I$ ($x \in A_i$ et $y \in A_i$), ce qui équivaut à $\exists i \in I$ ($y \in A_i$ et $x \in A_i$), c'est-à-dire yRx.
R est transitive : supposons xRy et yRz, on trouve alors i et j dans I tels que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ et $y \in A_j$ et $z \in A_j$. Or, d'après la condition 3 (ou sa contraposée), comme $y \in A_i \cap A_j$, on doit donc avoir $i = j$. On a donc $x \in A_i$ et $z \in A_i$, ce qui donne xRz.
2. Soit C un classe d'équivalence, disons $C = C_x$ (la classe d'équivalence de x) pour un certain $x \in X$. D'après la condition 2, on trouve $i \in I$ tel que $x \in A_i$.
Montrons que si $x \in A_i$, alors $C_x = A_i$, par double inclusion. Si $y \in C_x$, il existe $j \in I$ tel que $x \in A_j$ et $y \in A_j$. Comme $x \in A_i \cap A_j$, on doit avoir $i = j$ (par la condition 3), et on a donc bien $y \in A_i$. Réciproquement, si $y \in A_i$, comme on a aussi $x \in A_i$, on a xRy, ce qui dit que $y \in C_x$.
Ainsi, pour toute classe d'équivalence C, on vient de montrer que C est de la forme A_i.
Réciproquement, pour n'importe quel ensemble A_i, il existe $x \in A_i$ d'après la condition 1, et alors $A_i = C_x$ d'après ce qu'on veint de montrer : tous les ensembles A_i sont donc des classes d'équivalence.

Exercice 3.7. Relations d'ordre

À partir de l'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$, on définit les relations suivantes. Pour chacune de ces relations, dire si ce sont des relations d'ordre ; si oui, dire si elles sont totales ou partielles ; et si elles sont partielles, donner deux éléments incomparables.
1. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x, y)R(x', y')$ ssi $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

2. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x, y)R(x', y')$ ssi $x \leq x'$ ou $y \leq y'$.

3. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x, y)R(x', y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$.

4. Sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f \leq g$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)$.

Exercice 3.8. Une relation sur les entiers
Sur $\mathbb{N}$, on définit une relation R par : xRy ssi il existe des entiers $n, m \geq 1$ tels que $y = nx^m$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, si xRy alors $x \leq y$.

2. Montrer que R est une relation d'ordre.

3. Montrer que 2 et 3 sont incomparables pour la relation R.

Réponse : 1. Supposons que xRy, on trouve donc m et n des entiers ≥ 1 tels que $y = nx^m$. Comme $m \geq 1$, et $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x^m$, et puisque $n \geq 1$, $x \leq x^m \leq nx^m = y$.
2. R est réflexive : xRx est vrai puisque $x = 1 \times x^1$.
R est antisymétrique : si xRy et yRx, on obtient d'après la question précédente que $x \leq y$ et $y \leq x$, ce qui donne $x = y$ puisque la relation $\leq$ est antisymétrique.
R est transitive : si xRy et yRz, on trouve des entiers $n, m, k, l \geq 1$ tels que $y = nx^m$ et $z = ky^l$. On trouve alors $z = k(nx^m)^l = (kn^l)x^{ml}$, où kn^l et ml sont des entiers ≥ 1. Cela signifie que xRz.
Donc R est une relation d'ordre.
3. D'après la question 1, si on avait $3R2$, on aurait $3 \leq 2$, ce qui n'est pas le cas ; donc $3R2$ est faux. Si on avait $2R3$, on pourrait écrire $3 = n2^m$ avec n et m des entiers ≥ 1, ce qui nous donnerait en particulier que 3 est pair : c'et faux, et donc $2R3$ également.
Donc 2 et 3 sont incomparables.

<u>Exercice 3.9. Inclusion</u>
Soit X un ensemble non-vide. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathcal{P}(X)$.

1. Vérifier que $\emptyset$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(X)$ et que X est le plus grand élément de $\mathcal{P}(X)$.

2. Quels sont les éléments minimaux de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$? S'agit-il de plus petits éléments ? (la réponse pourra dépendre de l'ensemble X)

3. On suppose ici que $X = \{1, 2, 3\}$. Représenter sur un graphe l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ avec la relation $\subset$.

<u>Exercice 3.10. Divisibilité</u>
On définit la relation suivante sur $\mathbb{N}$: $x|y$ ssi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$ (on dit que x divise y).

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.

2. Montrer que 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ pour cette relation, et 0 le plus grand élément.

3. Caractériser les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

4. Représenter par un graphe l'ensemble $\{1, \ldots, 12\}$ avec la relation $|$.