MEEF1 M2 — Université Paris-Saclay

Mathématiques (EC 222) — Année 2023/2024

Examen de Mathématiques

Le 20 décembre 2023, durée : 3h.

- *Le sujet comporte 6 pages et se compose de 7 exercices indépendants.*
- *Rédigez sur des copies séparées les exos 1 à 4 et les exos 5 à 7.*
- *Les réponses non justifiées ne rapportent aucun point*
- *Le barème* indicatif *est sur 40 points.*
- *L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé ; tout autre matériel électronique, ouvrage de référence et document est interdit.*

Exercice 1 (5 points)
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Affirmation 1 : “ $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt{144}}$ est un nombre décimal. ”

Affirmation 2 : “ $\dfrac{7}{3} - 8$ est un nombre rationnel. ”

Affirmation 3 : “ La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5. ”

Affirmation 4 : “ L’équation $(x+1)(x-2) = (x-3)(x+4)$ admet un nombre entier comme solution.”

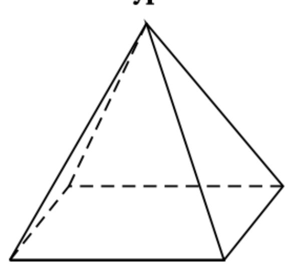
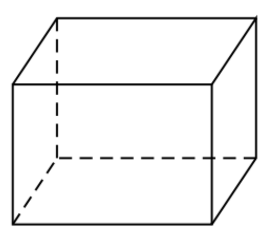
Exercice 2 (6 points)
Pour fêter les 25 ans de sa boutique, un chocolatier souhaite offrir aux premiers clients de la journée une boîte contenant des truffes au chocolat.

1. Il a confectionné 300 truffes : 125 truffes parfumées au café et 175 truffes enrobées de noix de coco.
Il souhaite fabriquer ces boîtes de sorte que :

- Le nombre de truffes parfumées au café soit le même dans chaque boîte ;
- Le nombre de truffes enrobées de noix de coco soit le même dans chaque boîte ;
- Toutes les truffes soient utilisées.

(a) Décomposer 125 et 175 en produit de facteurs premiers.
(b) En déduire la liste des diviseurs communs à 125 et 175.
(c) Quel nombre maximal de boîtes pourra-t-il réaliser ?
(d) Dans ce cas, combien y aura-t-il de truffes de chaque sorte dans chaque boîte ?

2. Le chocolatier souhaite fabriquer des boîtes contenant 12 truffes. Pour cela, il a le choix entre deux types de boites qui peuvent contenir les 12 truffes, et dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

Type A	**Type B**
	
Pyramide à base carrée de côté 4,8 cm et de hauteur 5 cm	**Pavé droit de longueur 5 cm, de largeur 3,5 cm et de hauteur 3,5 cm**

Dans cette question, chacune des 12 truffes est assimilée à une boule de diamètre $1,5$ cm.
À l’intérieur d’une boîte, pour que les truffes ne s’abîment pas pendant le transport, le volume occupé par les truffes doit être supérieur au volume non occupé par les truffes.
Quel(s) type(s) de boîte le chocolatier doit-il choisir pour que cette condition soit respectée ?

Rappels :

Le volume d'une boule de rayon r est : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3$

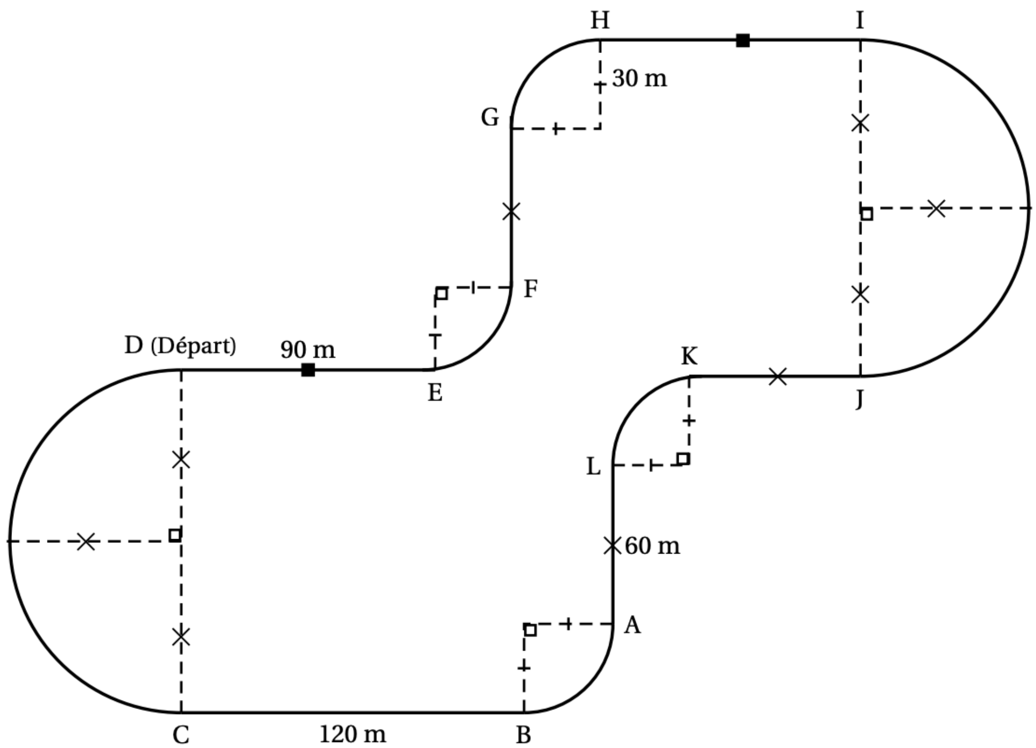
Le volume d'une pyramide est : $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

Le volume d'un pav droit est : longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur

Exercice 3 (6 points)

Un professionnel et un amateur vont faire une séance de karting sur la piste ci-dessous (représentée en traits pleins).

Cette piste est constituée de segments, de demi-cercles et de quarts de cercles.



Le professionnel fait un tour de piste en 60 secondes.

L'amateur fait un tour de piste en 72 secondes.

1. Montrer que la longueur de la piste est de 1045 m, arrondie à l'unité près.
   Toute trace de recherche sera valorisée.
2. Calculer la vitesse moyenne du professionnel en m/s. On arrondira au centième près.
3. Pour des raisons de sécurité sur ce circuit, les amateurs ne doivent pas dépasser les 60 km/h de moyenne. Cet amateur respecte-t-il les règles de sécurité ?
4. Le professionnel et l'amateur partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours de circuit.
   On rappelle que le professionnel effectue un tour en 60 s et l'amateur en 72 s.

(a) Décomposer 60 et 72 en produit de facteurs premiers.

(b) Au bout de combien de temps se retrouveront-ils pour la première fois sur la ligne de départ ensemble ?

(c) Combien auront-ils alors effectué de tours chacun ?

Exercice 4 (7 points)

On considère le programme de calcul suivant :

Nombre de départ

↓

- Calculer le carré de ce nombre
- Multiplier par 5
- Ajouter 4
- Multiplier par 2
- Enlever 8

↓

Résultat

PARTIE A

1. Montrer que si 3 est le nombre de départ, le programme donne un résultat égal à 90.
2. Un élève choisit 2 comme nombre de départ et un autre élève choisit -2.
Montrer qu'ils doivent obtenir le même résultat.
3. Si on nomme x le nombre de départ, montrer que le résultat du programme peut s'écrire $10x^2$.
4. Généraliser à tout réel x le résultat du 2.

PARTIE B

Pour cette partie, un élève cherche le ou les nombre(s) qu'il doit choisir pour obtenir 30 comme résultat.

1. Que peut-il déduire de la question 4 pour sa recherche ?
2. Il utilise une feuille de calcul dont un extrait est donné ci-dessous :

	A	B	C
1	Nombre de départ	Résultat	
2	1,60	25,600	
3	1,61	25,921	
4	1,62	26,244	
5	1,63	26,569	
6	1,64	26,896	
7	1,65	27,225	
8	1,66	27,556	
9	1,67	27,889	
10	1,68	28,224	
11	1,69	28,561	
12	1,70	28,900	
13	1,71	29,241	
14	1,72	29,584	
15	1,73	29,929	
16	1,74	30,276	
17	1,75	30,625	
18	1,76	30,976	
19	1,77	31,329	
20	1,78	31,684	
21	1,79	32,041	
22	1,80	32,400	
23			

(a) Quelle formule a-t-il pu entrer dans la cellule `B2` avant de l'étirer vers le bas ? Ne pas justifier.

(b) Dans ce tableau, quel est le nombre de départ donnant le résultat le plus proche de 30 ? Justifier.

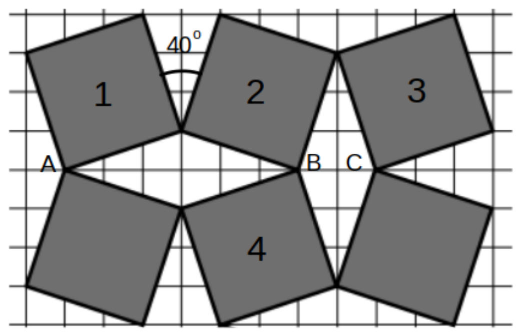
(c) Que peut-il en déduire pour sa recherche ?

3. Déterminer la valeur exacte des nombres cherchés par l'élève.

↑ Rédigez sur des copies différentes ↓

Exercice 5 (3 points)

On considère six carrés identiques disposés comme sur la figure ci-contre. Les points A, B et C dénotent chacun un sommet commun à deux carrés. Quatre de ces carrés sont numérotés. L'angle entre les carrés 1 et 2 repéré sur la figure est de $40\,°$.

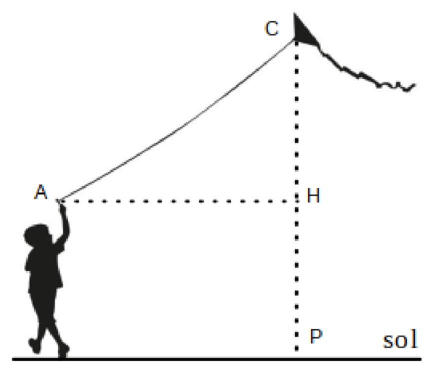


Donner, sans justification :

1. Une transformation permettant de passer du carré 3 au carré 1,
2. Une rotation permettant de passer du carré 1 au carré 2,
3. une symétrie permettant de passer du carré 2 au carré 4.

Exercice 6 (5 points)

On modélise un enfant jouant avec un cerf-volant par la figure ci-contre. La droite (CP) est perpendiculaire au sol, tandis que la droite (AH) est parallèle au sol. Les point C, H et P sont alignés. La corde a une longueur de 35 m et on la suppose parfaitement tendue, suivant exactement le segment $[AC]$. La main de l'enfant, représentée par la point A est à une distance de 1,5 m du sol.



Le dessin n'est pas à l'échelle.

1. Calculer la longueur HP.
2. Montrer que le triangle AHC est rectangle en H.
3. À quelle hauteur se trouve le cerf-volant quand l'angle entre la corde et l'horizontale est de $60°$? On en donnera un arrondi à 1 dm près.

La vitesse du vent change : le cerf-volant se déplace de sorte que la longueur AH soit à présent de 28 m.

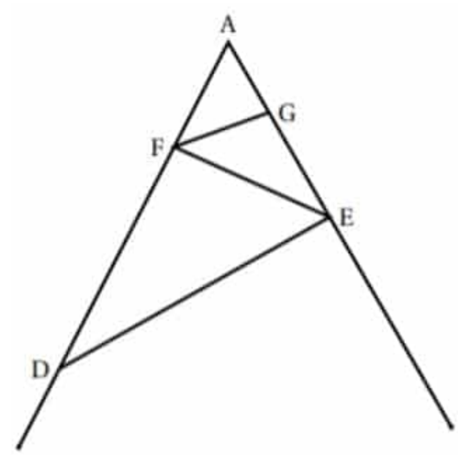
4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HAC}$, arrondie au degré près.

Exercice 7 (8 points)

Dans cet exercice, ne pas réussir à traiter une question n'empêche de traiter aucune des questions suivantes sauf possiblement la question 3 (b).

On considère deux demi-droites d'origine commune A, comme sur le dessin ci-contre. On place les points D, F sur l'une, et E, G sur l'autre, de sorte que D, F, A et E, G, A soient respectivement alignés dans cet ordre.

On donne les longueurs suivantes : $AF = 2{,}5\,\text{cm}$, $AD = 7\,\text{cm}$, $AE = 4{,}2\,\text{cm}$ et $AG = 1{,}5\,\text{cm}$.



Le dessin n'est pas à l'échelle.

1. (a) Montrer que les droites (FG) et (DE) sont parallèles.
   (b) Sachant que $FG = 2\,\text{cm}$, calculer DE.
2. (a) Montrer que le triangle AFG est rectangle en G.
   (b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GAF}$ à 0,1 degré près.
3. (a) En considérant EFG, calculer la longueur de $[EF]$.
   (b) Le triangle EFD est-il rectangle ?
4. Montrer que les angles $\widehat{GFE}$ et $\widehat{FED}$ ont même mesure.

On veut poursuivre la construction en plaçant un point H sur $[AF]$, tel que la droite (GH) soit parallèle à la droite (EF).

5. Donner un arrondi de la longueur AH au mm près.