Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Feuille d'exercices 6

Polynômes

Exercice 6.1. Racines d'un polynôme
Soit $P(X) = 2X^3 + 7X^2 + 7X + 2$. Vérifier que -2 est une racine de P, en déduire toutes les racines complexes de P, et écrire P sous forme scindée.

Exercice 6.2. Racines doubles
Soit $a \in \mathbb{R}$, et $P(X) = 4X^2 + (a-1)X + 1$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles P n'a qu'une racine double, et calculer cette racine.

Exercice 6.3. Racines de ploynômes à coefficients complexes
Trouver les racines des polynômes $P(X) = X^2 + 2iX - 2$ et $Q(X) = X^2 + 2X + 1 - 2i$.

Exercice 6.4. Division euclidienne
1. Trouver les valeurs de a pour lesquelles le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 - 2aX + 2$.
2. Faire la division euclidienne de $X^3 + aX^2 - 2aX + 2$ par $X - 1$ et retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 6.5. Factorisation de polynômes
Soit $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 1$.
1. Trouver une racine imaginaire pure de P.
2. En déduire la factorisation de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.6. Factorisation de polynômes
Soit $P(X) = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24$.
1. Trouver une racine évidente de P, ainsi que sa multiplicité.
2. En déduire la factorisation de P en facteurs irréductibles.

Exercice 6.7. Factorisation de polynômes
1. Déterminer les racines réelles du polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.
2. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6.8. Racines complexes et cosinus
Soit $P(X) = X^5 - 1$.
1. Quel est le quotient de la division de $P(X)$ par $X - 1$?
2. Donner les racines complexes de P sous forme trigonométrique et les représenter graphiquement

dans le plan complexe.
3. En déduire que la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1).$$

4. Sans utiliser la question précédente, montrer que $(X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ssi a et b sont solutions du système $\begin{cases} a + b = 1 \\ ab + 1 = 0 \end{cases}$.
5. Résoudre le système précédent.
6. En déduire les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.

Exercice 6.9. Fonctions polynomiales
On sait d'après les cours d'analyse que si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale non constante, telle que $P'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.
1. Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 + 7X + 5$.
a. Montrer que P admet une unique racine réelle et justifier que c'est une racine simple.
b. Montrer que P admet deux racines complexes distinctes non réelles.
2. Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.
a. Montrer que P admet une unique racine réelle.
b. Trouver la valeur de cette racine et donner sa multiplicité.
c. Est-ce que P admet des racines complexes non réelles ?

Exercice 6.10. Reste d'une division euclidienne
On fixe un entier $n \geq 1$ et $P_1(X) = X^n$.
1. Soit $P_2(X) = X^2 - 3X + 2$, on écrit la division euclidienne $P_1 = P_2 Q + R$ et on cherche à déterminer le reste R.
a. Trouver les racines de P_2.
b. Justifier que le reste $R(X)$ s'écrit sous la forme $R(X) = aX + b$.
c. En calculant les valeurs de P_1 en des points bien choisis, montrer que a et b sont les solutions du système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$.
d. Résoudre le système précédent et écrire le reste $R(X)$.
e. Vérifier le résultat pour $n = 3$ en effectuant la division euclidienne.
2. Soit $P_2(X) = (X-1)^2$, on écrit la division euclidienne $P_1 = P_2 Q + R$ et on cherche à déterminer le reste R.
a. Justifier que le reste $R(X)$ s'écrit sous la forme $R(X) = aX + b$.
b. Exprimer P_1' en fonction de Q, R et de leurs dérivées.
c. Montrer que a et b sont les solutions du système $\begin{cases} a + b = 1 \\ a = n \end{cases}$.
d. Résoudre le système précédent et écrire le reste $R(X)$.
e. Vérifier le résultat pour $n = 3$ en effectuant la division euclidienne.