Corrigé du Test 2

1 d) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$(S) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin n)\, x^n$$

$\boxed{\text{Solution}}$:

- Comme $\sin n \not\to 0$ si $n \to +\infty$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$ diverge : (S) diverge en $x = 1$
  donc $R \leq 1$
- On a $\quad 0 \leq |\sin(n)\, x^n| \leq |x|^n \quad \forall n \geq 0$

  Si $|x| < 1$ la série $\sum |x|^n$ converge donc (critère de comparaison) :

  (S) converge (absolument) si $|x| < 1$, ce qui implique $R \geq 1$
- Conclusion : $R = 1$

$\boxed{\text{Remarques}}$

1) Il est délicat de travailler directement avec la suite $(\sin n)_{n \geq 0}$:

   On peut montrer qu'elle est dense dans $[-1,1]$, c'est-à-dire que :
   $\forall \ell \in [-1,1]$ il existe une suite extraite $(\sin n_k)_{k \geq 0}$ telle que $\sin(n_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell$

(Voir par exemple Xavier Gourdon "Les maths en tête, Analyse" (Ellipses) page 197)

2) Si $z \in \mathbb{C}$, on sait que $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, dans ce cas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

En particulier, si $z = e^{i\theta} x$ $\left(\begin{array}{l}\theta, x \text{ réels} \\ |x| < 1\end{array}\right)$

on a $$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^n = \frac{1}{1-e^{i\theta} x} \qquad (*)$$

Si (S_n) est une suite dans $\mathbb{C}$ on sait que

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z_0 \iff \begin{array}{l} \mathrm{Re}(S_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(z_0) \\ \mathrm{Im}(S_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(z_0) \end{array}$$

(Remarquer qu'on peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$
$z = a + ib \longleftrightarrow (a,b)$ et que $|z| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$)

En particulier, si (S_n) est la suite des sommes partielles de la série numérique $(*)$, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} x^n}_{(1)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n}_{(2)} + i \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n\right)}_{(3)}$$

$$= \frac{1}{1-e^{i\theta} x}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[$$

En particulier, $$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta} x}\right).$$

((1) CV $\iff$ (2) et (3) CV
Dans ce cas, on a l'égalité)

7 c) Déterminer le DSE, sur un intervalle à préciser, de la fonction

$$x \longrightarrow \ln(1+x^2)$$

(On ne demande pas de calculer le rayon de convergence de la série entière obtenue)

Solution : On peut partir du résultat du Cours

$$\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

$$\boxed{\forall u \in]-1, 1[}$$

petit détail essentiel souvent oublié dans vos copies...

Si $|x| < 1$ alors $u = -x^2 \in]-1, 1[$ donc

$$\ln(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

13a) Déterminer le rayon de convergence et la valeur de la somme de la série entière

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n$$

Solution : • On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = 1$ donc (Critère de d'Alembert) $R = \frac{1}{1} = 1$.

• Pour le calcul de la somme, on peut partir de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \boxed{\forall x \in]-1, 1[}$$

toujours ce petit détail...

Le rayon de la série géométrique est 1, donc sur l'intervalle $]-1,1[$ on a (cours)

$$(1-x)^{-2} = \left((1-x)^{-1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)'$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

De même,

$$2(1-x)^{-3} = \left((1-x)^{-2}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n x^{n-1})'$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

Finalement, $$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[$$