Test 2

1. Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

Corrigé

Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = \frac{|x|^{n^2}}{2^n}$ et on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n^2+2n+1}}{2^{n+1}} \Big/ \frac{|x|^{n^2}}{2^n} = \frac{1}{2}\,|x|^{2n+1}$. On voit que si $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et si $|x| > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. On en déduit grâce au critère de d'Alembert que si $|x| < 1$, la série $\sum \frac{|x|^{n^2}}{2^n}$ converge et que si $|x| > 1$, la série $\sum \frac{|x|^{n^2}}{2^n}$ diverge. Il en résulte que $R = 1$.

2. Soit Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Que peut-on dire de R si la série $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge ?

Corrigé

On sait donc que x_0 appartient au domaine de convergence E de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Donc $x_0 \in [-R, R]$ (car on a toujours $E \subset [-R, R]$), ce qui donne $R \geq |x_0|$.

3. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ en série entière, en précisant son rayon de convergence.

Corrigé

On sait que $\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$ pour tout $u \in]-1, 1[$ (et même pour tout $u \in [-1, 1[$). On en déduit que pour tous les x tels que $-x^2 \in]-1, 1[$, c'est-à-dire pour tous les $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1 + x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{2n}$. Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$. On peut le démontrer en utilisant la règle de d'Alembert. On pose $u_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{2n}\right| = \frac{x^{2n}}{n}$. On a (pour $x \neq 0$) $u_{n+1}/u_n = \frac{n}{n+1} x^2 \to x^2$ quand $n \to +\infty$. Si $x^2 < 1$ (c'est-à-dire si $|x| < 1$) la série $\sum u_n$ converge et si $x^2 > 1$ (c'est-à-dire si $|x| > 1$), elle diverge. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{2n}$ est bien

$R = 1$.

4. Déterminer pour la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{4^n}$ son rayon de convergence et la valeur de sa somme.

Corrigé
On peut utiliser le critère de d'Alembert du cours sur les séries entières. Ici $a_n = \frac{(-1)^n}{4^n}$.
On a $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{4} \to \dfrac{1}{4} = l$ quand $n \to +\infty$. Le rayon de convergence de notre série entière vaut donc $R = 1/l = 4$.
Pour tout $x \in]-4, 4[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{-x}{4}\right)} = \frac{4}{4+x}$.

Bonus
5. La fonction g définie par $g(x,t) = \frac{xt^3}{x^4+t^4}$ si $(x,t) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Corrigé
On va montrer que g n'est pas continue en $(0,0)$.
Pour la suite de points $\left((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$, on a

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)$. Donc g n'est pas continue en $(0,0)$.