Planche 7

Rester coordonnées

Exercice 72 ().

1. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*
2. Calculer les coordonnées du polynômes X dans la base $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*
3. On se place dans $E = \mathrm{Vect}(x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2})$.
   Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ dans la base $(x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2})$ de E *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*

Solution sans rédaction

Il faut à chaque fois traduire ce que l'on cherche en terme de système linéaire (ou alors essayer de le voir à l'œil...)

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$ *dans la base* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *a pour coordonnées* $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ *dans la base* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
2.

Exercice 73 ().

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Rappeler la définition de surjectivité en terme d'égalités entre deux espaces vectoriels.
2. Démontrer que u est surjective si et seulement si $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim F$

Correction

1. *L'application u est surjective si* $\operatorname{Im}(u) = F$
2. *D'une part, si u est surjective alors* $\operatorname{Im}(u) = F$ *par définition et donc on a immédiatement l'égalité des dimensions :*

$$\dim(\operatorname{Im} u) = \dim F$$

Réciproquement, supposons que $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim F$. *On sait de plus que par définition* *de l'image on a* $\mathrm{Im}(u) \subset F$*, et donc par inclusion et égalité des dimension on a :*

$$\mathrm{Im}(u) = F$$

c'est-à-dire que u est surjective.
Ainsi, par double implication, on a l'équivalence voulue.

Exercice 74 ().
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E, tels que $E = F \oplus G$.
Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} u & : & F \times G & \to & E \\ & & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$

est injective et surjective.
En déduire que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'une élément de G.

Correction

Démontrons que u est injective, c'est-à-dire que $\ker u = \{0\}$*. Soit* $(f,g) \in F \times G$ *tel que* $u(f,g) = 0$*. Montrons que* $f = 0$ *et* $g = 0$*.*
On a $f + g = 0$*, et donc* $f = -g$*. Ainsi* $f \in F$ *par définition mais aussi* $f \in G$ *puisque* $-g \in G$*. Donc*

$$f \in F \cap G$$

Or, F et G sont en somme directe donc $F \cap G = \{0\}$ *et donc* $f = 0$*.*
Mézalor $0 + g = 0$ *et donc* $g = 0$*. L'application u est donc bien injective.*
Montrons maintenant la surjectivité. Posons $y \in E$ *et démontrons qu'il existe* $(f,g) \in F \times G$ *tels que* $u(f,g) = y$*.*
Or $E = F + G$ *donc il existe* $f \in F$ *et* $g \in G$ *tels que* $y = f + g$*. Par définition de u on a donc* $y = u(f,g)$ *et donc y a bien au moins un antécédent par u. Donc l'application est surjective.*
On en déduit que tout vecteur $x \in E$ *s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'une élément de G (surjectivité de u) et cela de manière unique car il n'y a qu'un antécédent possible pour x (injectivité de u).*

Exercice 75 ().
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille donnée est une base de l'espace considérée.

1. La famille (X^2+1, X^2+X, X^2+X+1) dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La famille $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. La famille $\big(X-1, X^2+1, X(X+1)\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée par les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Correction

Au moment où cette feuille est abordée, l'argument avec le déterminant de la matrice formée par les coordonnées des vecteurs n'a pas été vu (il est vu en bilan de cette feuille).
Mais une fois que c'est vu, c'est l'argument le plus rapide !

1. *La matrice des coordonnées de cette famille dans la base canonique* $\{1, X, X^2\}$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   dont le déterminant, après calculs (à faire !), est non nul. La famille est donc une base.

2. *La matrice des coordonnées de cette famille dans la base canonique* $\{1, X, X^2\}$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   dont le déterminant, après calculs (à faire !), est non nul. La famille est donc une base.

3. *même raisonnement*
4. *même raisonnement*
5. *même raisonnement*

Exercice 76 ().
À l'aide du lemme de Steinitz et du fait que la famille de polynômes $\{1, X, X^2, \ldots, X^p\}$ est libre pour tout entier $p \geq 1$, démontrer que $\mathbb{R}[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes de degré quelconque) ne peut pas avoir de dimension.

Correction

Raisonnons par l'absurde : si $\mathbb{R}[X]$ *avait une dimension, notons la* n.
La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ *est libre et formée de* $n+1$ *vecteurs.*
D'après la conséquence du lemme de Steinitz (une famille libre a moins de vecteurs qu'une famille génératrice, donc d'une base en particulier) on aurait donc $n+1 \leq n$, *ce qui est absurde.*
L'espace $\mathbb{R}[X]$ *n'a donc pas de dimension.*

Exercice 77 ().
En utilisant le principe d'extraction, déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(X, (X+1)^2, X^2+1)$
2. $\mathrm{Im}(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{Im}(C)$ pour $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Correction

1. *On remarque que* $X^2+1=(X+1)^2-2\times X$ *donc* $F=\text{Vect}(X,(X+1)^2)$. *Ensuite, les deux polynômes restants ne sont pas colinéaire puisque pas de mêmes degrés. Ils forment donc une famille libre et donc finalement une base.*
2. *On a*
$$\text{Im}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right)$$
On remarque que
$$\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
donc
$$\text{Im}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$
Les deux vecteurs restants n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\text{Im}(A)$.
3. *On a :*
$$\text{Im}(C)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$
Or,
$$\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$
donc
$$\text{Im}(C)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$
De plus,
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$
(Pour trouver cette relation, on peut d'abord chercher à obtenir la coordonnée valant 0. Si on ne trouve pas de relation il faudrait montrer que la famille est libre !) *donc*
$$\text{Im}(C)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$
Les deux vecteurs restants n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\text{Im}(C)$.

Exercice 78 ().

On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^4$?

1. $\{v_1, v_2, v_3\}$
2. $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$
3. $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
4. $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

Correction

1. *Non car la famille n'a pas le bon nombre de vecteurs*
2. *La famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit donc de vérifier si elle est libre (ou génératrice si vous trouvez cela plus facile). Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que*

$$xv_1 + yv_2 + zv_4 + tv_5 = 0$$

On obtient alors en identifiant chaque coordonnée le système suivant :

$$\begin{cases} x & & & = 0 \\ & & t & = 0 \\ & y & & = 0 \\ x & & +z+t & = 0 \end{cases}$$

D'où l'on conclut immédiatement que $x = y = z = t = 0$. La famille est donc libre et c'est une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'elle possède 4 vecteurs.

3. *Non car la famille n'a pas le bon nombre de vecteurs*
4. *La famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit donc de vérifier si elle est libre (ou génératrice si vous trouvez cela plus facile). Or, $v_3 + v_4 = v_5$ donc la famille est liée, ça n'est donc pas une base.*

Exercice 79 ().

Dans cet exercice, on définit la notion suivante :

Définition 4: Polynôme d'endomorphisme, polynôme annulateur

Soit $Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p \in \mathbb{R}[X]$ avec $p \geq 1$ un entier. On définit alors l'endomorphisme $Q(u) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$Q(u) = a_0\mathrm{id} + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_pu^p$$

Un tel endomorphisme est appelé *polynôme en u*.
On dit que Q est *annulateur* de u si $Q(u) = 0$.

1. Rappeler la signification de u^2, u^3, et plus généralement de u^p pour tout entier $p \geq 1$.
2. Quel type d'objet est $Q(u)$? Que représente 0 dans l'égalité $Q(u) = 0$?
3. Soit f un endomorphisme de E. Déterminer, à partir de chacune des relations suivantes que l'on considère, un polynôme annulateur de f.

(a) $f^3 = 0$

(b) $f \circ f = \mathrm{id}$

(c) $f \circ f = f$

(d) $f \circ f = -\mathrm{id}$

Correction

1. *La puissance doit se comprendre en terme de composition d'applications :* $u^2 = u \circ u$, *c'est-à-dire que* u^2 *est l'application linéaire définie par* $u^2(x) = u\big(u(x)\big)$. *De manière générale,* $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}}$.
2. *Chaque puissance de* u *est une application linéaire, on les additionne, donc* $Q(u)$ *est aussi une application linéaire. On pourra donc faire* $Q(u)(x)$. *En particulier,* 0 *dans l'égalité* $Q(u) = 0$ *désigne l'application linéaire nulle.*
3. *(a)* $P(X) = X^3$ *est annulateur*

   (b) $P(X) = X^2 - 1$ *est annulateur*

   (c) $P(X) = X^2 - X$ *est annulateur*

   (d) $P(X) = X^2 + 1$ *est annulateur*

Exercice 80 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels ayant pour bases respectives $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ avec $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers. On considère $u : E \to F$ une application linéaire injective et surjective.

1. Justifier que $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est génératrice de F.
2. Démontrer que $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est libre.
3. Qu'en déduire sur les dimensions de E et F ?

Correction

1. *Les vecteurs de* $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ *sont bien dans* F*, donc il faut montrer qu'ils permettent d'obtenir n'importe quel vecteur de* F*. Soit* $v \in F$ *un vecteur quelconque. Comme* u *est surjective, il existe* $x \in E$ *tel que* $u(x) = v$*. Or, puisque* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *est une base de* E*, on peut écrire*
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$
où les λ_i *représentent les coordonnées de* x *dans la base.*
Mézalor, par linéarité
$$v = u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i)$$
Donc $v \in \mathrm{Vect}\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ *et donc la famille est bien génératrice.*
2. *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que*
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$$
Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$*.*
Or, par linéarité,
$$u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = 0$$

Comme u est injective, nécessairement

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

Mais comme la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre (puisque c'est une base de E), on a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
La famille $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est donc libre.

3. *On déduit des deux question précédentes que la famille $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est une base de F, et puisqu'elle a autant de vecteurs qu'une base de E, on a :*

$$\dim(E) = \dim(F)$$

Exercice 81 ().
On considère l'application suivante :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Autrement dit, l'image par f d'un polynôme est le vecteur formé par ses coordonnées dans la base $(1, X, X^2)$

1. Démontrer que f est une application linéaire
2. Démontrer que f est injective et surjective
3. On considère la famille suivante : $(X-1, X+1, X^2+X+1)$
   (a) Calculer l'image par f de chacun de ces polynômes, puis écrire la matrice M dont les colonnes sont ces images.
   (b) Justifier les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+X+1) = 0 \\ \overset{(1)}{\iff} \; & \lambda_1 f(X-1) + \lambda_2 f(X+1) + \lambda_3 f(X^2+X+1) = 0 \\ \overset{(2)}{\iff} \; & M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

   (c) En déduire que les polynômes $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ forment une base $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si leurs coordonnées forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Démontrer alors que $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ est effectivement une base.
   (e) Calculer M^{-1}.
   (f) Calculer les coordonnées des vecteurs de la famille $(1, X, X^2)$ dans la base $(X-1, X+1, X^2+X+1)$. Commenter.