Planche 7

Rester coordonnées

Exercice 72 ().

1. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*
2. Calculer les coordonnées du polynômes X dans la base $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*
3. On se place dans $E = \text{Vect}(x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2})$.
   Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ dans la base $(x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2})$ de E *(on ne demande pas de montrer que c'est bien une base).*

Exercice 73 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Rappeler la définition de surjectivité en terme d'égalités entre deux espaces vectoriels.
2. Démontrer que u est surjective si et seulement si $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim F$

Exercice 74 ().
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E, tels que $E = F \oplus G$.
Démontrer que l'application

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (f, g) & \mapsto & f + g \end{array}$$

est injective et surjective.
En déduire que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'une élément de G.

Exercice 75 ().
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille donnée est une base de l'espace considérée.

1. La famille (X^2+1, X^2+X, X^2+X+1) dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La famille $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. La famille $\big(X-1, X^2+1, X(X+1)\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée par les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
5. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée par les vecteurs
$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Exercice 76 ().
À l'aide du lemme de Steinitz et du fait que la famille de polynômes $\{1, X, X^2, \dots, X^p\}$ est libre pour tout entier $p \geq 1$, démontrer que $\mathbb{R}_[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes de degré quelconque) ne peut pas avoir de dimension.

Exercice 77 ().
En utilisant le principe d'extraction, déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(X, (X+1)^2, X^2+1)$
2. $\mathrm{Im}(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{Im}(C)$ pour $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 78 ().
On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$.
Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^4$?

1. $\{v_1, v_2, v_3\}$
2. $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$
3. $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
4. $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

Exercice 79 ().
Dans cet exercice, on définit la notion suivante :

Définition 4: Polynôme d'endomorphisme, polynôme annulateur

Soit $Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p \in \mathbb{R}[X]$ avec $p \geq 1$ un entier. On définit alors l'endomorphisme $Q(u) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$Q(u) = a_0\mathrm{id} + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_pu^p$$

Un tel endomorphisme est appelé *polynôme en u*.
On dit que Q est *annulateur* de u si $Q(u) = 0$.

1. Rappeler la signification de u^2, u^3, et plus généralement de u^p pour tout entier $p \geq 1$.
2. Quel type d'objet est $Q(u)$? Que représente 0 dans l'égalité $Q(u) = 0$?
3. Soit f un endomorphisme de E. Déterminer, à partir de chacune des relations suivantes que l'on considère, un polynôme annulateur de f.

   (a) $f^3 = 0$
   (b) $f \circ f = \mathrm{id}$
   (c) $f \circ f = f$
   (d) $f \circ f = -\mathrm{id}$

Exercice 80 ().

Soient E et F deux espaces vectoriels ayant pour bases respectives $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ avec $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers. On considère $u : E \to F$ une application linéaire injective et surjective.

1. Justifier que $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est génératrice de F.
2. Démontrer que $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est libre.
3. Qu'en déduire sur les dimensions de E et F ?

Exercice 81 ().
On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Autrement dit, l'image par f d'un polynôme est le vecteur formé par ses coordonnées dans la base $(1, X, X^2)$

1. Démontrer que f est une application linéaire
2. Démontrer que f est injective et surjective
3. On considère la famille suivante : $(X-1, X+1, X^2+X+1)$
   (a) Calculer l'image par f de chacun de ces polynômes, puis écrire la matrice M dont les colonnes sont ces images.
   (b) Justifier les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+X+1) = 0 \\ \overset{(1)}{\iff} \; & \lambda_1 f(X-1) + \lambda_2 f(X+1) + \lambda_3 f(X^2+X+1) = 0 \\ \overset{(2)}{\iff} \; & M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

   (c) En déduire que les polynômes $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ forment une base $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si leurs coordonnées forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Démontrer alors que $(X-1, X+1, X^2+X+1)$ est effectivement une base.
   (e) Calculer M^{-1}.
   (f) Calculer les coordonnées des vecteurs de la famille $(1, X, X^2)$ dans la base $(X-1, X+1, X^2+X+1)$. Commenter.