Bilan feuille 7 :

Raisonnement vecteurs / coordonnées : E ev, $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

point de vue EV	point de vue coordonnées dans $\mathbb{R}^n$
$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$
famille $v_1, \dots, v_k$	famille $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

→ utilisation du déterminant.

Exemple : $(1+X, \ 1-X, \ 1-X^2)$ (Base de $\mathbb{R}_2[X]$: $1, X, X^2$)

$$\begin{matrix} \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1

X

X^2

Image d'une app linéaire : $u : E \to F$

- $\mathrm{rang}(u) = \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(u)}_{\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))})$

si $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

(Rq : $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$)

exemple : $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$

$P(X) \longmapsto (1-X)P'(X) + P(X)$

famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$: $\{f(1), f(x), f(x^2)\}$

$= \{1, 1, 2x - x^2\}$

Base de $\mathrm{Im}(f)$: $\{1, 2x - x^2\}$

Donc $\mathrm{rang}(f) = 2$.

$(u : E \to F)$

- u est surjective $\iff$ $\mathrm{rang}(u) = \dim(F)$

(Dans l'exemple précédent, f n'est pas surjective car $\underset{\mathrm{rg}(f)}{2} \neq \underset{\dim(\mathbb{R}_2[X])}{3}$)

- Somme d'espaces :

$\underbrace{E = F \oplus G}_{}$: F et G sont <u>supplémentaires dans E</u>

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$

- Polynômes annulateurs :
  - Sur les matrices : P est annulateur de A si $P(A) = 0$.

$a + bX + cX^2 + \dots$

- Sur les endomorphismes :

  P est annulateur de u si $P(u) = 0$.

  exemple : $u \circ u = u$ $(u^2 = u)$

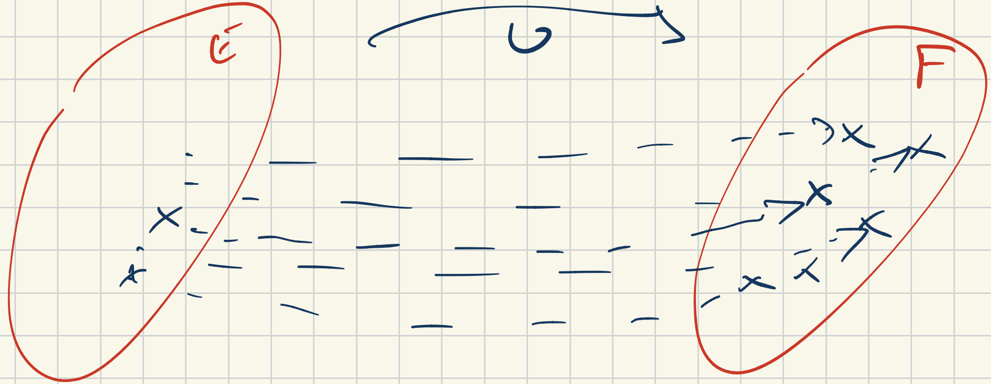
  Donc $u^2 - u = 0$

  Donc $X^2 - X$ est annulateur de u.

- <u>Isomorphisme</u> :

  Def : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si u est injective <u>et</u> surjective.

  Dans ce cas $\dim(E) = \dim(F)$.



Pour tout vecteur de F :
- il y a un antécédent (surjectivité)
- et un seul (injectivité)

exemple : $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Si u est un isomorphisme, son inverse u^{-1} existe

$$u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = id$$