Planche 8

Rentrer dans le rang

Exercice 82 ().
Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer son rang à l'aide d'une base de son image.

1. L'application linéaire
$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+3y+2z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$
2. L'application linéaire
$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ 3x+y-z \\ x-3y+3z \\ 2x+4y-4z \end{pmatrix} \end{array}$$
3. L'application linéaire
$$u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(0), P'0)\big) \end{array}$$
4. L'application linéaire
$$v \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & X\Big(P'(X+1) - P'(1)\Big) \end{array}$$

Correction

Ici on nous demande explicitement de calculer une base de l'image. Une fois le bilan de cette feuille vue, vous pouvez adopter une autre stratégie, en général plus rapide : calculer la matrice de l'application dans la base canonique, et déterminer le rang de cette matrice (qui correspond également au rang de l'application linéaire).
Pour chaque cas la stratégie est la suivante :

- *On sait (propriété du cours) que les images des vecteurs de la base canonique forment une famille génératrice de l'image de l'application. On calcule cette famille.*
- *On extrait de cette famille génératrice une base*
- *Le rang est alors le nombre de vecteurs de la base obtenue (puisque le rang est la dimension de l'image)*

1. *On calcule :*
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ *peut s'obtenir par combinaison linéaire des deux autres, qui eux ne sont pas colinéaires donc forme une famille libre, et donc une base, de* $\operatorname{Im} f$.

Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = 2$.

2. *Même principe*
3. *La base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *est* $\{1, X, X^2, X^3\}$ *donc on calcule les images de chacun de ces vecteurs :*

$$u(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad u(X) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad u(X^2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad u(X^3) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

On remarque alors immédiatement que la famille $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ *est génératrice de l'image, et est libre, donc c'est une base et* $\operatorname{rg}(u) = 2$.

4. *De même, mais cette fois avec la base canonique* $\{1, X, X^2\}$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *:*

$$v(1) = 0, \quad v(X) = 0, \quad v(X^2) = 2X^2$$

Donc $\{2X^2\}$ *est génératrice de* $\operatorname{Im}(v)$*, elle est libre, donc c'est une base de* $\operatorname{Im}(v)$ *et ainsi* $\operatorname{rg}(v) = 1$.

Exercice 83 ().

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B, sous forme factorisée.
2. Démontrer que χ_A est annulateur de A et χ_B annulateur de B

Correction

Exercice 84 ().

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X) + (1 - X)P'(X) \end{array}$$

1. Démontrer que c'est un endomorphisme.
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs vecteurs de coordonnées dans la base canonique
3. On pose $P(X) = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

(a) Écrire le vecteur v_1 des coordonnées de ce polynôme dans la base $\{1, X, X^2\}$ (dans cet ordre)

(b) Écrire le vecteur v_2 des coordonnées de l'image de ce polynôme dans la base $\{1, X, X^2\}$ (dans cet ordre)

(c) Déterminer une matrice M telle que $Mv_1 = v_2$. Commenter au regard de la quesiton 2).

Correction

1. *Démontrons tout d'abord que f est linéaire :*
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P(X) + Q(X)) &= \lambda P(X) + Q(X) + (1 - X)\big(\lambda P(X) + Q(X)\big)' \\ &= \lambda P(X) + Q(X) + (1 - X)\big(\lambda P'(X) + Q'(X)\big) \qquad \textit{par propriété de la dérivée} \\ &= \lambda P(X) + \lambda(1 - X)P'(X) + Q(X) + (1 - X)Q'(X) \\ &= \lambda f(P(X)) + f(Q(X)) \end{aligned}$$

   Ainsi f est bien linéaire.
   De plus, $f(1) = 1$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = X - X^2$, donc par linéarité toute image sera bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, donc on peut bien prendre $\mathbb{R}_2[X]$ comme espace d'arrivée.

2. *Les images sont calculées dans la question précédente, leurs coordonnées respectives dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$ sont :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. *On pose $P(X) = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.*

   (a) *On a immédiatement*

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   (b) *On a*

$$f(a + bX + cX^2) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = a + b + c(X - X^2)$$

   Ainsi :

$$v_2 = \begin{pmatrix} a + b \\ c \\ -c \end{pmatrix}$$

   (c) *On constate que*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et on remarque que c'est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées calculés en question 2.

Exercice 85 (). On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X)+(1-X)P'(X) \end{array}$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B}=\{1,(X-1),(X-1)^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Calculer les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$ et leurs vecteurs de coordonnées dans $\mathcal{B}$.
3. On pose $P(X)=a+b(X-1)+c(X-1)^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Écrire le vecteur v_1 des coordonnées de ce polynôme dans la base $\mathcal{B}$
   (b) Écrire le vecteur v_2 des coordonnées de l'image de ce polynôme dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Déterminer une matrice M telle que $Mv_1=v_2$. Commenter au regard de la question 2).

Correction

1. *On calcule le déterminant de la matrice formée à partir des coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique :*
$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
Comme cette matrice est triangulaire, son déterminant est le produit des éléments diagonaux, donc 1, donc non nul et donc la famille est bien une base.
2. *On calcule :* $f(1)=1$, $f(X-1)=X-1+(1-X)=0$, *et* $f((X-1)^2)=(X-1)^2+(1-X)2(X-1)=-(X-1)^2$.
Les coordonnées respectives de ces images, dans la base $\mathcal{B}$, *sont :*
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$
3. *On pose* $P(X)=a+b(X-1)+c(X-1)^2$ *un polynôme quelconque de* $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) On a immédiatement
$$v_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$
   (b) On a
$$f(a+b(X-1)+c(X-1)^2)=af(1)+bf(X-1)+cf((X-1)^2)=a+b(X-1)-c(X-1)^2$$
   Ainsi :
$$v_2=\begin{pmatrix}a\\b\\-c\end{pmatrix}$$
   (c) On constate que
$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

et on remarque que c'est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées calculés en question 2.

Exercice 86 ().
Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E, ayant pour bases respectives $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_p\}$ et $\mathcal{B}_G = \{g_1, \dots, g_k\}$
On s'intéresse à la famille $\mathcal{V} = \{f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_k\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{V}$ est génératrice de $F + G$.
2. Si F et G sont en somme directe, démontrer que $\mathcal{V}$ est une base de $F + G$.
3. En déduire $\dim(F \oplus G)$.
4. la réciproque est-elle vraie ?

Correction

Exercice 87 ().

1. On considère la famille $\{X - 1 + X^2, X^3 + 1, -X - X^3, -2X^3 - 2X - X^2\}$. Déterminer une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.
2. Justifier que la famille $\{X^2 + X + 1, X^2 + X\}$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction

On traduit chaque vecteur en vecteur de coordonnées et on procède comme dans l'exercice 77 !

Exercice 88 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension 2, avec deux bases différentes : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$.
Supposons que :

$$w_1 = av_1 + bv_2$$

$$w_2 = cv_1 + dv_2$$

1. Quel terme mathématique désigne ce que représente a et b d'une part, et c et d d'autre part ? (autrement dit, reformuler par une phrase en français les deux égalités ci-dessus)
2. Soit x un vecteur de E. Soient (x_1, x_2) les coordonnées de x dans la base $\mathcal{W}$. Déterminer les coordonnées (y_1, y_2) de x dans la base $\mathcal{V}$.
3. Trouver la matrice T qui transforme les coordonnées (x_1, x_2) en les coordonnées (y_1, y_2), c'est-à-dire telle que :
$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Correction

1. *a et b sont les coordonnées de w_1 dans la base $\mathcal{V}$. c et d sont les coordonnées de w_2 dans la base $\mathcal{V}$.*

2. *On a :*

$$\begin{aligned} x &= x_1w_1 + x_2w_2 && \textit{par définition des coordonnées} \\ &= x_1(av_1 + bv_2) + x_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (ax_1 + cx_2)v_1 + (bx_1 + dx_2)v_2 \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de x dans la base $\mathcal{V}$ sont :

$$\begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{V}}$$

3. *On a par identification :*

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

On remarque que c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{W}$ dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 89 (). On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$. On pose

$$F = \mathrm{Vect}(u_1 + u_2, u_3) \qquad G = \mathrm{Vect}(u_1 + u_3, u_4) \qquad H = \mathrm{Vect}(u_1 + u_4, u_2)$$

1. Pour chacun des vecteurs en jeu dans les familles génératrices, écrire les vecteurs de coordonnées correspondants dans la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
2. Démontrer qu'on peut trouver un vecteur qui se décompose de plusieurs manières comme somme de trois éléments de F, G et H.
3. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$
4. Démontrer que $F \cap H = \{0\}$
5. Démontrer que $G \cap H = \{0\}$
6. Commenter

Correction

1. *Pour F :*

   - $u_1 + u_2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - u_3 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Pour G :

   - $u_1 + u_3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- u_4 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour H :

- $u_1 + u_4$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- u_2 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. *À l'aide des coordonnées (ou pas), on remarque par exemple que :*

$$\underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{(u_1 + u_3)}_{\in G} + \underbrace{u_2}_{\in H} = \underbrace{(u_1 + u_2 + u_3)}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} + \underbrace{0}_{\in H}$$

qui sont bien deux décompositions différentes d'un même vecteur

3. *Le plus rapide est de raisonner sur les coordonnées. Un élément de F a des coordonnées de la forme*

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un élément de G a des coordonnées de la forme

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour un élément de $F \cap G$ on a donc :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, en identifiant les coordonnées on a : $a = c$, $a = 0$, $b = c$, $0 = d$. Et donc tous ces coefficients sont égaux à 0. Donc 0 est le seul vecteur de $F \cap G$.

4. *On procède de même*
5. *On procède de même*
6. *La définition de somme directe s'étend à plus que deux sous-espaces, mais il ne suffit pas de dire que les intersections deux à deux sont égales à $\{0\}$, car l'exemple ci-dessus démontre que malgré cela il n'y a pas unicité de la décomposition d'un vecteur (alors que cette unicité est une caractéristique des sommes directes)*

Exercice 90 ().
On considère E, F deux espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$. Le but est de démontrer qu'il existe un isomorphisme entre E et F.
On pose $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_i) = f_i$.

1. Soit $x \in E$. Calculer $u(x)$ et exprimer notamment ses coordonnées dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$.
2. Démontrer que u est un isomorphisme.

Exercice 91 ().
Soit E un espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u^k(x)$ pour tout entier $k \geq 0$.
2. Calculer $au^k(x) + bu^j(x)$ pour tous nombres $a, b \in \mathbb{R}$ et tous entiers $k, j \geq 0$.
3. Calculer $P(u)(x)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. En déduire que les valeurs propres de u se trouvent parmi les racines de n'importe quel polynôme annulateur.

Exercice 92 (). Soit $n \geq 1$ un entier. Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du rang :

$$\text{rang} u = \dim E - \dim \ker u$$

On pose $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ une base de $\ker u$.
On pose également $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ une base de $\operatorname{Im} u$, et $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_r\}$ une famille de E telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$u(v'_i) = f_i$$

1. Démontrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est une famille libre.
2. Démontrer que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$ est libre.
3. Soit $x \in E$
   (a) Démontrer qu'il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que
   $$x - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v'_i \in \ker u$$
   (b) Montrer alors que
   $$x \in \text{vect}(v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$$
4. Conclure la démonstration du théorème.

Correction

1. *Pour montrer l'égalité entre les deux ensembles, procédons par double inclusion : pour tout i, $u(e_i) \in \operatorname{Im} u$. Or puisque $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire d'éléments de $\operatorname{Im} u$ reste dans $\operatorname{Im} u$. Donc toute combinaison linéaire des $u(e_i)$ est dans $\operatorname{Im} u$. Ainsi, tout élément de Vect$(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est dans $\operatorname{Im} u$, ce qui signifie que*
   $$Vect(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \subset \operatorname{Im} u$$
   De plus, soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Puisque $x \in E$, il existe

des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Ainsi, par linéarité,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) \in \mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Donc $y \in \mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$*. Ceci étant valable pour tout* y *de* $\operatorname{Im} u$*, on a la seconde inclusion :*

$$\operatorname{Im} u \subset \mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Donc finalement

$$\operatorname{Im} u = \mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

On a alors l'égalité des dimensions de ces deux sous-espace vectoriels :

$$\mathit{rang}(u) = \dim(\mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)))$$

Or la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ *est génératrice de* $\mathit{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$*. Elle n'est pas forcément libre car il peut y avoir dans cette famille des vecteurs liés, mais il ne peut donc y avoir que n éléments ou moins (en cas de vecteurs liés) pour former une base. Donc :*

$$\mathit{rang}(u) \leq n$$

2. *On nous dit que* $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ *une base de* $\operatorname{Im} u$*. Or pour être une base, une des conditions est de former une famille libre ! Donc cette famille est libre.*
3. *Supposons qu'il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$*,* $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r$ *tels que :*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i v'_i = 0$$

On cherche à démontrer que tous les λ_i *et* $\lambda' i$ *sont nuls.*
Par linéarité de u, on a, en appliquant u à cette égalité :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u(v_i) + \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i u(v'_i) = u(0) = 0$$

Or $v_1, \ldots, v_k$ *sont des éléments du noyau de* u*, donc* $u(v_i) = 0$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots k\}$*. On a donc :*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i u(v'_i) = 0$$

Ce qui signifie que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i f_i = 0$$

Mézalor, puisque $(f_1, \ldots f_r)$ *est libre on a nécessairement* $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \cdots = \lambda'_r = 0$*.*

On a donc, en revenant à l'égalité de départ :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$$

Mais $(v_1, \ldots, v_k)$ *est aussi une base (de* $\ker u$*) et est donc aussi une famille libre. Donc de la même manière,* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Ainsi, tous les coefficients de la combinaison linéaire de départ sont bien nuls, et donc la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$ *est libre.*