# *Planche 8*

## *Rentrer dans le rang*

**Exercice 82 ().**
Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer son rang à l'aide d'une base de son image.

1. L'application linéaire
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+3y+2z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$
2. L'application linéaire
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ 3x+y-z \\ x-3y+3z \\ 2x+4y-4z \end{pmatrix} \end{array}$$
3. L'application linéaire
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(0), P'0)\big) \end{array}$$
4. L'application linéaire
$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & X\Big(P'(X+1) - P'(1)\Big) \end{array}$$

**Exercice 83 ().**
On considère les deux matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques $\chi_A$ et $\chi_B$, sous forme factorisée.
2. Démontrer que $\chi_A$ est annulateur de $A$ et $\chi_B$ annulateur de $B$

**Exercice 84 ().**
On considère l'application suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) + (1-X)P'(X) \end{array}$$

1. Démontrer que c'est un endomorphisme.
2. Calculer les images par $f$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs vecteurs de coordonnées dans la base canonique
3. On pose $P(X) = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

(a) Écrire le vecteur $v_1$ des coordonnées de ce polynôme dans la base $\{1, X, X^2\}$ (dans cet ordre)

(b) Écrire le vecteur $v_2$ des coordonnées de l'image de ce polynôme dans la base $\{1, X, X^2\}$ (dans cet ordre)

(c) Déterminer une matrice $M$ telle que $Mv_1 = v_2$. Commenter au regard de la quesiton 2).

**Exercice 85 ().** On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X) + (1-X)P'(X) \end{array}$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = \{1, (X-1), (X-1)^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Calculer les images par $f$ des vecteurs de $\mathcal{B}$ et leurs vecteurs de coordonnées dans $\mathcal{B}$.
3. On pose $P(X) = a + b(X-1) + c(X-1)^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Écrire le vecteur $v_1$ des coordonnées de ce polynôme dans la base $\mathcal{B}$
   (b) Écrire le vecteur $v_2$ des coordonnées de l'image de ce polynôme dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Déterminer une matrice $M$ telle que $Mv_1 = v_2$. Commenter au regard de la question 2).

**Exercice 86 ().**
Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel $E$, ayant pour bases respectives $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_p\}$ et $\mathcal{B}_G = \{g_1, \dots, g_k\}$
On s'intéresse à la famille $\mathcal{V} = \{f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_k\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{V}$ est génératrice de $F + G$.
2. Si $F$ et $G$ sont en somme directe, démontrer que $\mathcal{V}$ est une base de $F + G$.
3. En déduire $\dim(F \oplus G)$.
4. la réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 87 ().**

1. On considère la famille $\{X - 1 + X^2, X^3 + 1, -X - X^3, -2X^3 - 2X - X^2\}$. Déterminer une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.
2. Justifier que la famille $\{X^2 + X + 1, X^2 + X\}$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 88 ().**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2, avec deux bases différentes : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$.
Supposons que :

$$w_1 = av_1 + bv_2$$

$$w_2 = cv_1 + dv_2$$

1. Quel terme mathématique désigne ce que représente $a$ et $b$ d'une part, et $c$ et $d$ d'autre part ? (autrement dit, reformuler par une phrase en français les deux égalités ci-dessus)
2. Soit $x$ un vecteur de $E$. Soient $(x_1, x_2)$ les coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{W}$. Déterminer les coordonnées $(y_1, y_2)$ de $x$ dans la base $\mathcal{V}$.

3. Trouver la matrice $T$ qui transforme les coordonnées $(x_1, x_2)$ en les coordonnées $(y_1, y_2)$, c'est-à-dire telle que :
$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 89 ().** On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$. On pose

$$F = \mathrm{Vect}(u_1 + u_2, u_3) \qquad G = \mathrm{Vect}(u_1 + u_3, u_4) \qquad H = \mathrm{Vect}(u_1 + u_4, u_2)$$

1. Pour chacun des vecteurs en jeu dans les familles génératrices, écrire les vecteurs de coordonnées correspondants dans la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
2. Démontrer qu'on peut trouver un vecteur qui se décompose de plusieurs manières comme somme de trois éléments de $F$, $G$ et $H$.
3. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$
4. Démontrer que $F \cap H = \{0\}$
5. Démontrer que $G \cap H = \{0\}$
6. Commenter

**Exercice 90 ().**
On considère $E, F$ deux espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$. Le but est de démontrer qu'il existe un isomorphisme entre $E$ et $F$.
On pose $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de $F$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_i) = f_i$.

1. Soit $x \in E$. Calculer $u(x)$ et exprimer notamment ses coordonnées dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$.
2. Démontrer que $u$ est un isomorphisme.

**Exercice 91 ().**
Soit $E$ un espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u^k(x)$ pour tout entier $k \geq 0$.
2. Calculer $au^k(x) + bu^j(x)$ pour tous nombres $a, b \in \mathbb{R}$ et tous entiers $k, j \geq 0$.
3. Calculer $P(u)(x)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. En déduire que les valeurs propres de $u$ se trouvent parmi les racines de n'importe quel polynôme annulateur.

**Exercice 92 ().** Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $F$ un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du rang :

$$\mathrm{rang} u = \dim E - \dim \ker u$$

On pose $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $E$, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ une base de $\ker u$.
On pose également $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ une base de $\mathrm{Im}\, u$, et $\{v_1', v_2', \ldots, v_r'\}$ une famille de $E$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,
$$u(v_i') = f_i$$

1. Démontrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est une famille libre.
2. Démontrer que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1', v_2', \ldots, v_r')$ est libre.

3. Soit $x \in E$
   (a) Démontrer qu'il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que
   $$x - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v'_i \in \ker u$$
   (b) Montrer alors que
   $$x \in \text{vect}(v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$$
4. Conclure la démonstration du théorème.