Bilan feuille 8

Lien application linéaire / matrice (exo 84, 85)

Déf : $f : E \to F$ $\quad \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ base de E,

$\mathcal{B}_F (f_1, \dots, f_p)$ une base de F

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \cdot & & \\
\alpha_2 & \cdot & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\alpha_p & \cdot & &
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array}
\end{array}
$$

$f(e_1) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_p f_p$

exemple :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P(X) \mapsto (X^2-1)P'(X) - 2XP(X)$$

On a $(1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

$(P(X) = 1)$

$f(1) = -2X$

$(P(X) = X)$

$f(X) = (X^2-1) \times 1 - 2X \times X$
$= -X^2 - 1$

$(P(X) = X^2)$

$f(X^2) = (X^2-1)2X - 2X^3$
$= -2X$

Point de vue EV	Point de vue matriciel
$x = \sum \lambda_i e_i$	$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
$x' = \sum \mu_i e'_i$	$X' = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$
$f \in \mathcal{L}(E, F)$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$
(si $f \in \mathcal{L}(E)$)	($A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$)
$\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Sp}(f)$, injectivité/surj/inverse, pol carac	$\ker(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Sp}(A)$, injectivité/surj/inverse de A, χ_A

exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$ donc $1 - X^2 \in \ker(f)$

Changement de base : (exo 88)

Deux bases $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$

$B_2 = (f_1, f_2, f_3)$

d'un même espace E.

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$= \lambda'_1 f_1 + \lambda'_2 f_2 + \lambda'_3 f_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Matrice de passage :

* de B_1 à B_2 : $P_{B_1 \to B_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

* de B_2 à B_1 : $P_{B_2 \to B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$

utilisation pratique :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{B_1} = P_{B_1 \to B_2} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\left(P_{B_1 \to B_2} \right)^{-1} = P_{B_2 \to B_1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \end{pmatrix}_{B_2} = P_{B_2 \to B_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}_3$: $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$P_{B_2 \to B_1} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$P_{B_2 \to can} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{can} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$-1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

	$E\ (\mathcal{B})$	$E\ (\mathcal{B}')$	
$x \in E$	X	X'	coordonnées
$f \in \mathcal{L}(E)$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$	$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$	

$$X = P X' \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$$

$$P^{-1}X = X'$$

$$A = P A' P^{-1}$$

$$P^{-1}AP = A'$$

$$\underbrace{AX}_{f(x)^{\mathcal{B}}} \qquad \underbrace{A'X'}_{f(x)^{\mathcal{B}'}}$$

$$PA'P^{-1}X \leftarrow A'P^{-1}X$$

Polynôme annulateur :

- Les valeurs propres de f sont parmi les racines des polynômes annulateurs.
  (ce ne sont pas forcément toutes les racines)
- (théorème de Cayley - Hamilton) :
  Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Sommes directes / espaces supplémentaires

- F et G sont en somme directe $\Longleftrightarrow \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$

Def : F_1, F_2, F_3 sont en somme directe $(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3)$

Si pour tout $x \in F_1 + F_2 + F_3$,

$$x = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} + \underbrace{x_3}_{\in F_3}$$ de manière unique.

Si $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

alors $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

↳ Pour montrer que 3 espaces sont en somme directe

Théorème du rang :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(u))}_{rg(u)}$$

Conséquence :

Si $\dim(E) = \dim(F)$ (en particulier si $E = F$)

u injective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ u inversible.