TD IV – Convexité

1 Généralités

Exercice 1.1 (Topologie et convexité ★)**.** Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'adhérence de C est convexe.
2. L'intérieur de C est-il convexe ?
3. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est encore convexe.

Exercice 1.2 (Inégalité des pentes)**.** Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour un point a de I, on définit une fonction $g_a : I \to \mathbb{R}$ par

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

1. Comparer $g_a(x)$ et $g_x(a)$.
2. Soient $a < x < y$, montrer que
$$f(x) \leqslant \frac{x-a}{y-a} f(y) + \frac{y-x}{y-a} f(a).$$
3. Soient maintenant $x < a < y$, montrer de même que
$$f(x) \leqslant \frac{a-x}{y-a} f(y) + \frac{y-x}{y-a} f(a).$$
4. En déduire que g_a est une fonction croissante.

Exercice 1.3 (Exemples de fonctions convexes ★)**.** Les fonctions suivantes sont-elles convexes, concaves ou aucun des deux :

1. Les fonctions de Cobb-Douglas
$$f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$$
pour $0 < \alpha < 1$.
2. Les fonctions CES
$$g : (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \mapsto (a x^\gamma + (1-a) y^{1-\gamma})^{1/\gamma}$$
pour $0 < a, \gamma < 1$.

2 Optimisation convexe

Exercice 2.1 (Échauffement ★). On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y.$$

1. Calculer le gradient et la Hessienne de f.

2. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle convexe ?

3. Montrer que pour $a \in]-2; 2[$, la fonction f_a possède un unique minimum global et le calculer.

4. On suppose maintenat $|a| > 2$.

(a) Calculer

$$f_a(x, y) - \frac{1}{2}\left\langle H_{f_a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle$$

(b) En utilisant un vecteur propre bien choisi de H_{f_a}, montrer que f n'a pas de minimum global.

5. Que se passe-t-il pour $a = \pm 2$?

Exercice 2.2 (Minimisation sur une boule ★). Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $p > 0$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{\|x\|^2} + \langle a, x\rangle.$$

On cherche à minimiser f sur la boule fermée $B_f(0, p)$.

1. Justifier l'existence d'un minimum global de f sur $B_f(0, p)$.

2. Définir une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $B_f(0, p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leqslant 0\}$.

3. Écrire les conditions KKT pour la minimisation de f sous la contrainte $h(x) \leqslant 0$. On notera μ le multiplicateur associé à h.

4. On suppose $\mu \neq 0$.

(a) Montrer qu'alors $(2e^{p^2} - 2\mu)p = \|a\|$.

(b) En déduire la valeur de μ, puis celle de x.

(c) À quelle condition a-t-on $\mu \leqslant 0$?

5. On suppose maintenant $\mu = 0$.

(a) Montrer qu'alors $2\|x\|e^{\|x\|^2} = \|a\|$.

(b) On définit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = 2te^{t^2}$. Montrer que φ est une bijection.

(c) Exprimer x à l'aide de φ^{-1}.

(d) À quelle condition ce point vérifie-t-il la contrainte ?

6. Montrer que la fonction f est convexe.

7. Conclure.

Exercice 2.3 (Radio Londres)**.** Un problème classique de théorie de l'information est de distribuer une puissance totale entre plusieurs émetteurs de façon à maximiser le taux de transmission. Concrètement, on cherche à maximiser la fonction

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha_i + x_i),$$

où les α_i sont des constantes strictement positives, sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i & = & 1 \\ x_i & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Les x_i représentent le fraction de puissance totale disponible allouée à chaque émetteur et α_i encode le gain (en décibels) de l'émetteur en question.

1. Écrire le Lagrangien et les conditions KKT de ce problème *(Attention ! Comme il s'agit d'un problème de maximisation, les multiplicateurs devront être positifs)*. Pourquoi sont-elles suffisantes ?
2. On note μ le multiplicateur associé à la première contrainte et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les autres. Montrer que $\mu > 0$.
3. En distinguant suivant que μ est inférieur ou supérieur à $1/\alpha_i$, exprimer x_i en fonction de μ.
4. Montrer que μ est solution de l'équation
$$\sum_{i=1}^{n} \max\left(0, \frac{1}{\mu} - \alpha_i\right) = 1.$$
5. En déduire l'existence d'un unique maximum. On ne demande pas d'exprimer μ explicitement.

Exercice 2.4 (Méthode de pénalisation)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Pour une matrice $H \in \mathrm{M}_{pn}(\mathbb{R})$, on s'intéresse à l'optimisation de f sous les contraintes $Hx \leqslant d$.

1. Montrer que $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Hx \leqslant d\}$ est convexe.
2. On suppose que f admet un minimum sur $\mathcal{D}$, montrer qu'il est unique. On le note désormais $\widetilde{x}$.
3. Pour $\epsilon > 0$, on définit une fonction $f_\epsilon : U \to \mathbb{R}$ par
$$f_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{2\epsilon} \left\|\max(Hx - d, 0)\right\|^2,$$
où pour $v, w \in \mathbb{R}^p$ on note $\max(v, w)$ le vecteur de coordonnées $(\max(v_i, w_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
   (a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \left\|\max(Hx - d, 0)\right\|^2$ est convexe.
   (b) Montrer que h admet des dérivées partielles par rapport à toutes les coordonnées et que
   $$\nabla h(x) = 2H^t \max(Hx - d, 0).$$
   (c) Montrer que f_ϵ admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$, que l'on notera x_ϵ.
4. On veut maintenant montrer que $x_\epsilon \to \widetilde{x}$.
   (a) Montrer que $f(x_\epsilon) < f(x)$. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|x_\epsilon\| \leqslant C$ pour tout $\epsilon > 0$.
   (b) En déduire qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $(x_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(c) On suppose que $\ker(H^t) = \{0\}$. Montrer que $x_0 = \widetilde{x}$ et conclure.

Exercice 2.5 (Théorème de Slater ★)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = e^{-x}$$

qu'on veut minimiser sous la contrainte $h(x, y) \leqslant 0$, où $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par

$$h(x, y) = \frac{x^2}{y}.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'un problème d'optimisation convexe et déterminer l'unique minimum global sous contraintes.

2. (a) Déterminer le problème dual et le résoudre.

(b) Déterminer le saut de dualité du problème. Les hypothèses du Théorème de Slater sont-elles satisfaites ?

3 Optimisation quadratique

Exercice 3.1 (Meilleur antécédent par une matrice non inversible)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$. L'équation $Au = b$ n'ayant pas nécessairement de solution, on cherche la "meilleure approximation" possible en minimisant la quantité $\|Au - b\|$ sur u.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation quadratique.

2. Montrer que ce problème est convexe et en déduire que u réalise le minimum si et seulement si

$$A^t A u = A^t b.$$

3. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$ les valeurs propres de $A^t A$ et $v_1, \cdots, v_n$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondants. Montrer que

$$A^t A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^t.$$

4. On suppose que $\lambda_1, \cdots, \lambda_{i_0} = 0$ et $\lambda_j > 0$ pour tout $j > i_0$. Montrer que

$$P = A^t A \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^t$$

est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^t)$.

5. Montrer que le minimum est atteint en

$$\widetilde{u} = \left(\sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^t \right) A^t b.$$

Exercice 3.2 (Contraintes quadratiques ★)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y.$$

1. Écrire f comme une fonction quadratique. La fonction f est-elle convexe ? Strictement convexe ?

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 13 \;\&\; x + y \geqslant -1\}$.

2. (a) Dessiner $\mathcal{D}$.

(b) Montrer qu'il s'agit d'une partie convexe.

(c) Introduire deux fonctions $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x, y) \leqslant 0 \;\&\; h_2(x, y) \leqslant 0\}.$$

3. Montrer que les contraintes sont qualifiées en tout point de $\mathcal{D}$.

4. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point $\widetilde{x} \in \mathcal{D}$ soit un minimum global de f sous contraintes d'inégalité.

5. Déterminer tous les minima globaux de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3.3 (Contraintes d'égalités linéaires ★)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$, $G \in M_{pn}(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^p$. On s'intéresse au minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle.$$

sous la contrainte $Gx = c$.

1. Justifier que la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'applique si seulement si la matrice G est surjective. On supposera désormais cette condition vérifiée.

2. Montrer que f admet un unique minimum.

3. On note $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ le vecteur formé par les multiplicateurs de Lagrange. Exprimer le minimum $\widetilde{x}$ en fonction de λ.

4. Montrer qu'on doit avoir $GA^{-1}G^t\lambda = c + GA^{-1}b$

5. Justifier que la matrice $GA^{-1}G^t$ est inversible et donner une expression de $\widetilde{x}$ en fonction des données du problème.

6. La fonction f admet-elle un maximum sous ces contraintes ?

Exercice 3.4 (Un peu de dualité ★)**.** On considère le problème de minimisation de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sous les contraintes $x + y = 1$ et $x \geqslant 0$.

1. Écrire le Lagrangien associé à ce problème.

2. Déterminer le problème dual.

3. On cherche maintenant à résoudre le problème dual.

(a) Déterminer le maximum de f^* sur l'ensemble $\{(\lambda, \mu) \mid \mu < 0\}$.

(b) Faire de même sur $\{(\lambda, 0)\}$.

(c) Résoudre le problème dual.

4. À l'aide du Théorème de Slater, en déduire la solution du problème primal. Pour quelles valeurs de x et y est-elle atteinte ?