Université Paris-Saclay **Intégration MDD 302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 6 : Théorèmes de Fubini – Changements de variable

Exercice 1. (Vrai ou faux ? Corriger au besoin.)

1. L'ensemble $\{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable.
3. Une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.
4. Un théorème de Fubini affirme que, pour toutes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda.$$

Correction 1.

1. **Vrai.** Soit $A = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. La fonction $\mathbb{1}_A$ est positive, donc par le théorème de Fubini,

$$\int_A \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x, y)\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(y \mapsto \mathbb{1}_A(x, y)) = \mathbb{1}_{\{x\}}$$

dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle (le singleton $\{x\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$). Finalement,

$$\int_A \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}\lambda = 0.$$

2. **Faux.** On peut prendre par exemple $f : (x, y) \mapsto \mathbb{1}_{\{x=0\}}$. L'indicatrice de cette droite a une intégrale nulle (la preuve est très similaire à la question précédente) mais par contre, on a $f(0, y) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et la fonction $y \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. L'énoncé devient vrai (et est une conséquence de Fubini) si on le relaxe en « pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ ».
3. **Faux.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont M est la matrice dans la base canonique. Alors ϕ n'est pas l'endomorphisme nul. L'application ϕ est de classe C^1. Mais l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'étant pas injective, ce n'est pas un difféomorphisme. (On peut également remarquer que sa différentielle $d_x\phi$ en chaque point $x \in \mathbb{R}^2$ est égale à ϕ... et n'est donc pas inversible.)

   Par contre, si ϕ est un isomorphisme d'espace vectoriel (autrement dit si $M \in \mathrm{Gl}_2\mathbb{R}$ est une matrice inversible), alors $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un C^∞-difféomorphisme.
4. **Faux.** Par contre, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\mathrm{d}\lambda(x, y) = \int f\mathrm{d}\lambda \int g\mathrm{d}\lambda.$$

Exercice 2. (Intégrabilité sur $\mathbb{R}^2$).

1. Les fonctions suivantes ont-elles une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ bien définie ? Sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}^2$?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{1+x^2}{1+y^2}$;
   (c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$;
   (d) $\mathbb{1}_A$ où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 1 \le y \le x + 1\}$.

2. L'assertion suivante est-elle vraie :
   Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable et pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable, alors f est intégrable.

Correction 2.

1. On commence par remarquer que toutes les fonctions ci-dessus sont mesurables.
   (a) La fonction f est mesurable positive sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ a donc un sens dans $[0, \infty]$. Il reste à vérifier que f est intégrable. Par le théorème de Fubini-Tonelli (applicable car f est mesurable positive)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y)\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x)\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x)\right)^2\end{aligned}$$

   Comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est positive, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} [\arctan(x)]_{-n}^{n} = \pi$$

   les intégrales de Lebesgue et Riemann coïncident ici car on intègre une fonction continue sur un segment. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}\lambda = \pi^2 < \infty$$

   donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) La fonction g est mesurable positive sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de g sur $\mathbb{R}^2$ a donc un sens dans $[0, \infty]$. Par le théorème de Fubini-Tonelli (applicable car g est mesurable positive)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g \mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (1+x^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}\lambda(y)\right) \left(\int_{\mathbb{R}} 1 + x^2 \,\mathrm{d}\lambda(x)\right) \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}} 1 + x^2 \,\mathrm{d}\lambda(x) \geq \pi \int_{\mathbb{R}} 1 \,\mathrm{d}\lambda(x) = \infty.\end{aligned}$$

   Donc g n'est pas intégrable.
   (c) La fonction h n'est pas une fonction positive. Pour vérifier que l'intégrale a un sens, on vérifie que $|h|$ est d'intégrale finie, or, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\cos(xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}\right| \leq f(x, y)$$

   D'après 1. f est intégrable, il suit par monotonie de l'intégrale que l'intégrale de h est bien définie et que h est intégrable.
   (d) La fonction $\mathbb{1}_A$ est positive, donc son intégrale est bien définie. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x, y) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[x-1,x+1]} \mathrm{d}\lambda(y) = 2.$$

   Ainsi, par Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} 2 \mathrm{d}\lambda(x) = +\infty,$$

   autrement dit $\mathbb{1}_A$ n'est pas intégrable.

2. L'assertion est fausse. Un contre exemple est donné par la fonction $\mathbb{1}_A$ de l'exercice 2 (d). Un autre contre-exemple est donné par
$$f:(x,y)\mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$
Cette fonction positive admet une primitive explicite par rapport à chacune des variables. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on peut calculer
$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y)=\frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}<+\infty,$$
donc f est intégrable par rapport à y, pour tout $x\in\mathbb{R}$. Cette fonction est symétrique en ses arguments, donc symétriquement pour tout $y\in\mathbb{R}$ la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable. Néanmoins, pour tout $x\geq 1$, on a
$$\frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}\geq\frac{\pi}{\sqrt{2}x},$$
et le membre de droite n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f n'est pas intégrable.

Exercice 3. (Intégrale double sur un pavé).

1. Rappeler la valeur de
$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2} 1\mathrm{d}\lambda(x,y).$$
Interpréter ce résultat géométriquement.
2. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\cos(x+y)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}(x,y)$ est intégrable.
3. Calculer
$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Correction 3.

1. Par normalisation, l'intégrale double sur un pavé en mesure l'aire :
$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}\mathrm{d}\lambda=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y)=\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big)^2=\frac{\pi^2}{4}\,.$$
2. Comme l'image de la fonction cosinus est $[-1,1]$, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$|f(x,y)|=|\cos(x+y)|\,\mathbb{1}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}(x,y)\leq\mathbb{1}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}(x,y)$$
qui est intégrable par la question précédente. Par comparaison de fonctions mesurables positives, $|f|$ est intégrable et donc f l'est aussi.
3. Du fait de l'intégrabilité de f, on peut appliquer le théorème de Fubini :
$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y)=\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\Big(\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\cos(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\Big)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,.$$
Or, pour tout $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, l'application $x\mapsto\cos(x+y)$ est continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que pour tout y,
$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\cos(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x)=\Big[\sin(x+y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\big(y+\frac{\pi}{2}\big)-\sin(y)\,.$$
Comme cette fonction de y est aussi continue sur un segment, on conclut de même que
$$\begin{aligned}\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y)&=\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\Big(\sin\big(y+\frac{\pi}{2}\big)-\sin(y)\Big)\,\mathrm{d}\lambda(y)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\sin\big(y+\frac{\pi}{2}\big)-\sin(y)\Big)\,\mathrm{d}y\\&=\Big[-\cos\big(y+\frac{\pi}{2}\big)+\cos(y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-\cos(\pi)+\cos\big(\frac{\pi}{2}\big)+\cos\big(\frac{\pi}{2}\big)-\cos(0)=0\,.\end{aligned}$$

Exercice 4. (Intégrale double sur un triangle). Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$.

1. Dessiner T.
2. Calculer de deux façons différentes $\int_T 1 \mathrm{d}\lambda(x,y)$. Interpréter le résultat géométriquement.
3. Montrer que $(x,y) \mapsto (y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_T (y-2x)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Correction 4.

1.
2. L'intégrale $\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y)$ calcule l'aire du triangle T (ici T est d'aire 1). Comme $\mathbb{1}_T$ est mesurable positive, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y).$$

Soit $y \in \mathbb{R}$,
— si $y \notin [0,2]$, $T \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) = \emptyset$;
— si $y \in [0,2]$, $T \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) = \left[\frac{y}{2}, 1\right] \times \{y\}$.
Par conséquent
— si $y \notin [0,2]$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(x) = 0$;
— si $y \in [0,2]$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\left[\frac{y}{2},1\right]} 1\mathrm{d}\lambda(x)$.
Ainsi

$$\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[0,2]} \left(\int_{\left[\frac{y}{2},1\right]} 1\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[0,2]} 1 - \frac{y}{2}\mathrm{d}\lambda(y)$$

Comme on intègre une fonction continue sur un segment, il vient

$$\int_{[0,2]} 1 - \frac{y}{2}\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^2 1 - \frac{y}{2}\mathrm{d}y = \left[y - \frac{y^2}{4} \right]_0^2 = 1.$$

Passons à la seconde methode. Comme $\mathbb{1}_T$ est mesurable positive, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (mais dans l'autre sens)

$$\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,
— si $x \notin [0,1]$, $T \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$;
— si $x \in [0,1]$, $T \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \{x\} \times [0,2x]$.
Par conséquent
— si $x \notin [0,1]$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = 0$;
— si $x \in [0,1]$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[0,2x]} 1\mathrm{d}\lambda(y)$.
Ainsi

$$\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2x]} 1\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} 2x\mathrm{d}\lambda(x)$$

Comme on intègre une fonction continue sur un segment, il vient

$$\int_{[0,1]} 2x\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 2x\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1.$$

On trouve bien dans les deux cas

$$\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = 1$$

3. On a $T \subset [0,1] \times [0,2]$. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in T$, on a $|y-2x| \leq |y| + 2|x| \leq 4$. Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$|(y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)| \leq 4\mathbb{1}_T(x,y).$$
Comme $\mathbb{1}_T$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ par la question précédente et que $(x,y) \mapsto (y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)$ est mesurable, on obtient que $(x,y) \mapsto (y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
4. Comme $(x,y) \mapsto (y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de Fubini. On reprend le calcul des bornes d'intégration de la deuxième question.
$$\int_T (y-2x)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (y-2x)1_T(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2x]} (y-2x)\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x)$$
Pour tout $x \in [0,1]$, comme $y \mapsto y-2x$ une fonction continue sur $[0,2x]$, il vient
$$\int_{[0,2x]} (y-2x)\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^{2x} (y-2x)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_0^{2x} = -2x^2$$
Comme $x \mapsto -2x^2$ une fonction continue sur $[0,1]$, il vient
$$\int_{[0,1]} -2x^2\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 -2x^2\mathrm{d}x = \left[-\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{2}{3}.$$
Ainsi
$$\int_T (y-2x)\mathrm{d}\lambda(x,y) = -\frac{2}{3}.$$

Exercice 5. Dans cette exercice, on cherche à calculer $\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}\lambda(x)$. Soit $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}$.

1. Montrer que pour tout $y > 0$ et $x > 0$, $x \neq 1$
$$\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} = \frac{-\frac{x^2}{1-x^2}}{1+x^2y} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+y}.$$
2. Soit $n > 0$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$
$$\int_{]0,n[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+x^2n}{1+n} \right).$$
Puis, en déduire que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$
$$\int_{]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$
3. Montrer que
$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{\pi^2}{2}.$$
4. En déduire que
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Correction 5. 1. On cherche A et B tels que
$$\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} = \frac{A}{1+x^2y} + \frac{B}{1+y} \Rightarrow \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} = \frac{(A+B)+y(A+x^2B)}{(1+x^2y)(1+y)}.$$
En comparant les numérateurs on trouve que $A+B=1$ et $A+x^2B=0$. Donc $A = -\frac{x^2}{1-x^2}$ et $B = \frac{1}{1-x^2}$.

2. Notons d'abord que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$, les fontions $y \mapsto (1 + x^2 y)^{-1}$ et $y \mapsto (1 + y)^{-1}$ sont bien continues et intégrables dans $[0, n]$. Donc, d'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}\int_{]0,n[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) &= -\frac{x^2}{1-x^2}\int_{]0,n[} \frac{1}{1+x^2y}\mathrm{d}\lambda(y) + \frac{1}{1-x^2}\int_{]0,n[} \frac{1}{1+y}\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= -\frac{x^2}{1-x^2}\left[\frac{\ln(1+x^2y)}{x^2}\right]_{y=0}^{y=n} + \frac{1}{1-x^2}\left[\ln(1+y)\right]_{y=0}^{y=n} \\ &= \frac{1}{x^2-1}\ \ln\left(\frac{1+x^2n}{1+n}\right).\end{aligned}$$

Comme pour tout $x > 0$, $x \neq 1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est positive dans $]0, +\infty[$, d'après le Théorème de convergente monotone on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) &= \lim_{n\to+\infty}\int_{]0,n[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^2-1}\ \ln\left(\frac{1+x^2n}{1+n}\right) \\ &= \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.\end{aligned}$$

3. Comme f est positive sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, d'après le Théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{]0,+\infty[}\left(\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y). \tag{1}$$

On calcule d'abord l'intégrale par rapport à la variable x. Pour tout $y \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}\mathrm{d}\lambda(x) &= \frac{1}{1+y}\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,n[}\frac{1}{1+(\sqrt{y}x)^2}\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \frac{1}{1+y}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\arctan(\sqrt{y}x)}{\sqrt{y}}\right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant dans (1), on considère un changement de variables avec $\psi : [0, \sqrt{k}] \to [0, k]$ donnée par $\psi(y) = y^2$ et on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) &= \frac{\pi}{2}\lim_{k\to+\infty}\int_{[0,k]}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \pi\lim_{k\to+\infty}\int_{[0,\sqrt{k}]}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

4. D'après le résultat de la question 3, Fubini-Tonelli et puis la question 2 on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4} &= \frac{1}{2}\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\int_{]0,+\infty[}\left(\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{]0,+\infty[}\frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Exercice 6. (Formule du changement de variable).

1. Montrer que $\phi : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer son déterminant jacobien (c'est à dire le déterminant de la matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^2$).
3. En utilisant ce changement de variable, montrer que :
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y).$$
4. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Correction 6.

1. L'application ϕ est linéaire inversible car la matrice associée dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
c'est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Le déterminant jacobien de ϕ au point (x, y) est le déterminant de la jacobienne de ϕ en ce point, i.e de la matrice
$$J_{(x,y)}\phi = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x,y)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Le déterminant jacobien de ϕ est donc la fonction constante : $\det J_{(x,y)}\phi = -2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Par changement de variable, via le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, en appelant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction mesurable positive définie par $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \phi(x,y)\, |\det J_{(x,y)}\phi|\, \mathrm{d}\lambda(x,y) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y)\end{aligned}$$
car $f \circ \phi(x,y) = \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)}$ et $|\det J_{(x,y)}\phi| = 2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \mathrm{d}\lambda(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}\lambda(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1} \mathrm{d}\lambda(y)\Big)\end{aligned}$$
par le théorème de Fubini–Tonelli appliqué à la fonction positive f. On trouve donc $\frac{\pi^2}{2}$ (voir l'exercice 2 pour les calculs finaux).

Exercice 7. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)^2-(x-y)^2} \mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Correction 7. On cherche poser un changement de variable tel que $u = x+y$ et $v = x-y$. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. On a bien que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (voir Exercice 6, question 1). Sa matrice jacobienne est donnée par
$$J_{(u,v)}\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\det J_{(u,v)}\phi = -\frac{1}{2}$. Ainsi, comme $f(x,y) = e^{-(x+y)^2-(x-y)^2}$ est une fonction positive et mesurable, par changement de variables et puis Fubini-Tonelli on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)^2-(x-y)^2}\mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} f\circ\phi(u,v)\,|\det J_{(u,v)}\phi|\,\mathrm{d}\lambda(u,v)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2}e^{-v^2}\mathrm{d}\lambda(u,v)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\mathrm{d}\lambda(u)\right)\mathrm{d}\lambda(v)\\ &=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}\lambda(x) = \sqrt{\pi}$ (voir Exercice 5.31 du poly).

Exercice 8. (Coordonnées polaires).

Soit $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0, 1<x^2+y^2<9\}$ et $f:\mathbb{R}^2_*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. Dessiner A.
2. Calculer $\int_A f\mathrm{d}\lambda$ (on n'oubliera pas d'expliquer pourquoi l'intégrale a un sens).

Correction 8.

1. A est l'anneau constitué des points du plan dont la distance à 0 est comprise strictement entre 1 et 3, intersecté avec le quart de plan Nord-Est.
2. La fonction f est continue sur son domaine de définition. La fonction f, continue sur le compact $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 9\}$ y est bornée. Puisque $A\subset B$, f est donc bornée sur A, par une certaine constante M. Puisque $A\subset C = \{(x,y)\in\mathbb{R}, 0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq 3\}$ et que ce dernier est d'aire 9, on obtient

$$\int_A |f|\mathrm{d}\lambda \leq \int_A M\mathrm{d}\lambda \leq \int_C M\mathrm{d}\lambda = 9M\,.$$

Dans la dernière égalité on utilise par exemple la normalisation de l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. On a donc montré que f est intégrable sur A.

On utilise alors le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale de f sur A, dont on sait maintenant qu'elle est bien définie. On a vu en cours que, pour une fonction intégrable $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ (ou alors pour une fonction mesurable positive $g:\mathbb{R}^2\to[0,\infty]$), on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,d\lambda(x,y) = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\lambda(r,\theta)\,.$$

On applique cette égalité à la fonction $g = f\mathbb{1}_A$. On a

$$\begin{aligned}g(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r^2\cos\theta\ \sin\theta}{r^2}\mathbb{1}_{]1,3[}(r)\ \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(\theta)\\ &= \cos\theta\ \sin\theta\ \mathbb{1}_{]1,3[}(r)\ \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(\theta)\,.\end{aligned}$$

Il s'agit, comme dans certains exemples traités en cours d'une fonction à variables séparées (une fonction de θ multipliée par une fonction de r). Le théorème de Fubini s'applique (la fonction intégrée est intégrable) et donne

$$\begin{aligned}&\int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\lambda(r,\theta)\\ &\qquad= \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} \cos\theta\ \sin\theta\ \mathbb{1}_{]1,3[}(r)\ \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(\theta)\,r\,d\lambda(r,\theta)\\ &\qquad= \Big(\int_{]1,3[} r\,d\lambda(r)\Big)\Big(\int_{]0,\pi/2[}\cos\theta\sin\theta\,d\lambda(\theta)\Big)\\ &\qquad= 4\times 1/2 = 2\,.\end{aligned}$$

Exercice 9. On cherche à calculer l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.

1. Expliquer pourquoi cette intégrale à un sens.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(xy)^2+1} \mathrm{d}\lambda(x).$$
3. Calculer explicitement la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty]$ suivante
$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x).$$
(Indication. On pensera à distinguer le cas $y = 0$.)
4. Donner une primitive de la fonction réelle $y \mapsto ye^{-y^2}$ puis calculer (en justifiant)
$$\int_{\mathbb{R}} |y| e^{-y^2} \mathrm{d}\lambda(y).$$
5. En déduire que $I = \pi$.

Correction 9. On cherche à calculer l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.

1. Comme la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1}$ est mesurable positive sur $\mathbb{R}^2$, son intégrale est bien définie (à valeurs dans $[0,\infty]$).
2. On fixe $y \neq 0$. Comme la fonction $f_y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(xy)^2+1} \in \mathbb{R}$ est mesurable positive, par le théorème de convergence monotone,
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$
Comme de plus f_y est continue sur le fermé borné $[-n,n]$ et
$$\int_{[-n,n]} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-n}^{n} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{y} \int_{-n}^{n} \frac{y}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{y} \Big[\arctan(xy) \Big]_{-n}^{n}\,.$$
On remarque que si $y > 0$, $\arctan(\pm ny)$ converge vers $\pm\frac{\pi}{2}$ quand n converge vers ∞, alors que si $y < 0$, il converge vers $\mp\frac{\pi}{2}$. On en déduit que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{\pi}{|y|}\,.$$
Autre méthode. Par la propriété de dilatation de l'intégrale de Lebesgue par homothétie, comme la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$ est mesurable positive, il vient
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(xy)^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(xy) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{|y|} \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{|y|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{\pi}{|y|}$$
par le calcul de l'exercice 2.
3. À $y = 0$, cette fonction associe $\int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$. À $y \neq 0$, la fonction associe
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = y^2 e^{-y^2} \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2y^2+1} \,\mathrm{d}\lambda(x) = y^2 e^{-y^2} \cdot \frac{\pi}{|y|} = \pi |y| e^{-y^2}$$
par linéarité positive et la question précédente.

4. En écrivant $ye^{-y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \big(-2y\, e^{-y^2} \big)$, on reconnaît la dérivée de $y \mapsto -\frac{1}{2} e^{-y^2}$. Comme la fonction $y \mapsto |y| e^{-y^2}$ est positive et continue sur n'importe quel fermé borné du type $[-n, n]$, on calcule comme précédemment

$$\int_{\mathbb{R}} |y| e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) = \lim_{n \to \infty} \int_{[-n,n]} |y| e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |y| e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \,.$$

Or, par parité et par le calcul de primitive précédent,

$$\int_{-n}^{n} |y| e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = 2 \int_0^n y e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = 2 \Big[-\frac{1}{2}\, e^{-y^2} \Big]_0^n = 1 - e^{-n^2} \,.$$

On peut donc finalement conclure que

$$\int_{\mathbb{R}} |y| e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1 \,.$$

5. Il reste juste à appliquer le théorème de Fubini–Tonelli à la fonction mesurable positive f :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \, \mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \, \mathrm{d}\lambda(x) \Big) \, \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(\pi |y| e^{-y^2} \big) \, \mathrm{d}\lambda(y) && \text{(par la question 3)} \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}} \big(|y| e^{-y^2} \big) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \pi && \text{(par linéarité positive et la question 4).} \end{aligned}$$

Exercice 10. (Changement de variable).

1. On cherche à calculer, d'une manière différente, l'intégrale $J = \int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.
   (a) On admet que $\phi : (x,y) \mapsto (xy, e^{-y^2})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}\times]0,1[$. Calculer son déterminant jacobien (c'est à dire le déterminant de la matrice jacobienne en tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$).
   (b) En utilisant ce changement de variable, montrer que $J = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times]0,1[} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.
   (c) En déduire la valeur de J.
2. (a) En utilisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (x,-y)$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}\times]-\infty,0[} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{\pi}{2}.$$

   (b) Retrouver le résultat de l'exercice 9.

Correction 10.

1. (a) La matrice jacobienne de ϕ au point (x,y) s'écrit

$$J_{(x,y)}\phi = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -2ye^{-y^2} \end{pmatrix},$$

   donc le déterminant jacobien en ce point est

$$\det J_{(x,y)}\phi = -2y^2 e^{-y^2}.$$

   (b) Par la formule du changement de variable appliquée à la fonction mesurable positive $f : (X,Y) \mapsto \frac{1}{X^2+1}$ et au difféomorphisme ϕ on a

$$\int_{\mathbb{R}\times]0,1[} \frac{1}{X^2+1} \mathrm{d}\lambda(X,Y) = \int_{\mathbb{R}\times]0,\infty[} f\circ\phi(x,y) |\det J_{(x,y)}\phi| \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}\times]0,\infty[} 2\frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$$

   et donc

$$J = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times]0,1[} \frac{1}{X^2+1} \mathrm{d}\lambda(X,Y).$$

(c) On applique Fubini–Tonelli pour calculer cette intégrale d'une fonction mesurable et positive.

$$J = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{X^2+1}\left(\int_{]0,1[} \mathrm{d}\lambda(Y)\right)\mathrm{d}\lambda(X) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{X^2+1}\mathrm{d}\lambda(X).$$

La valeur de l'intégrale de droite a déjà été calculée plusieurs fois en TD, on obtient

$$J = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) L'application $(x, y) \mapsto (x, -y)$ est linéaire inversible sur $\mathbb{R}^2$ c'est donc un difféomorphisme. Elle induit un difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}\times] - \infty, 0[$. Par ailleurs, ce ψ laisse l'expression $\frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1}$ invariante et $J_{(x,y)}\psi = -1$ en tout $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$. On conclut grâce à la formule du changement de variables (pour les fonctions mesurables positives) :

$$\frac{\pi}{2} = J = \int_{\mathbb{R}\times]-\infty,0[} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1}\mathrm{d}\lambda(x, y).$$

(b) En additionnant les résultats des deux questions précédentes, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1}\mathrm{d}\lambda(x, y) = \pi.$$

Pour conclure, on utilise la propriété du cours suivante : toutes les droites, en particulier la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$, sont négligeables dans $\mathbb{R}^2$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1}\mathrm{d}\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1}\mathrm{d}\lambda(x, y).$$

Exercice 11. (Un peu de géométrie)

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. En utilisant le changement de variables $(x, y) \mapsto (ax, by)$, déterminer l'aire de l'ellipse
$$\mathcal{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}.$$
2. À l'aide du théorème de Fubini-Tonelli, déterminer le volume du cône de $\mathbb{R}^3$ de sommet $(0, 0, 1)$ et de base le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.
3. À l'aide du théorème de Fubini-Tonelli, déterminer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (pour la norme euclidienne).

Correction 11.

1. L'application $\phi : (x, y) \mapsto (ax, by)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ car c'est une application linéaire inversible. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\det J_{(x,y)}\phi = ab.$$
Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a que $(x, y) \in D$ si et seulement si $x^2 + y^2 < 1$ si et seulement si $\frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(by)^2}{b^2} < 1$ si et seulement si $\phi(x, y) \in \mathcal{E}$. Autrement dit $\phi(D) = \mathcal{E}$. On applique la fomule du changement de variables à la fonction mesurable positive 1 définie sur $\mathcal{E}$ et au difféomorphisme $\phi_{|D} : D \to \mathcal{E}$. On obtient
$$\mathcal{A}(E) = \int_{\mathcal{E}} 1\mathrm{d}\lambda = \int_D |\det J\phi|\mathrm{d}\lambda = ab.$$

2. On note C le cône. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction mesurable positive $\mathbb{1}_C$. On obtient
$$\mathrm{Vol}(C) = \int_C 1\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_C \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x,y,z)\mathrm{d}\lambda(x,y)\mathrm{d}\lambda(z).$$
Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $z \notin [0,1]$, on a que $\mathbb{1}_C(x,y,z) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \in [0,1]$, l'intersection de C avec le plan horizontal de coordonnée verticale z : $\{(x,y,z),(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est le disque de centre $(0,0,z)$ et de rayon $(1-z)$. On obtient donc
$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x,y,z)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \pi(1-z)^2.$$
Ainsi
$$\mathrm{Vol}(C) = \int_{[0,1]} \pi(1-z)^2\mathrm{d}\lambda(z) = \pi\left[-\frac{1}{3}(1-z)^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$
3. On reprend la méthode de la question précédente. On appelle B la boule unité. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction mesurable positive $\mathbb{1}_B$. On obtient
$$\mathrm{Vol}(B) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_B \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y,z)\mathrm{d}\lambda(x,y)\mathrm{d}\lambda(z).$$
Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $z \notin [-1,1]$, on a que $\mathbb{1}_B(x,y,z) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \in [-1,1]$, l'intersection de C avec le plan horizontal de coordonnée verticale z est le disque de centre $(0,0,z)$ et de rayon $\sqrt{1-z^2}$. On obtient donc
$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y,z)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \pi(1-z^2).$$
Ainsi
$$\mathrm{Vol}(B) = \int_{[-1,1]} \pi(1-z^2)\mathrm{d}\lambda(z) = \pi\left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

POUR S'ENTRAINER

Exercice 12. (Intégrale double non positive).

1. Montrer l'intégrabilité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \sin(x+y)e^{-y}\mathbb{1}_{[0,\pi]\times[0,+\infty[}(x,y).$$
2. Calculer $\int_{[0,\pi]\times[0,+\infty[} \sin(x+y)e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x,y)$.
(Indication. On pourra utiliser que $\cos(y) = \mathrm{Re}(e^{iy})$ pour déterminer une primitive de $y \mapsto e^{-y}\cos(y)$.)

Correction 12.

1. La fonction f n'est pas une fonction positive. Donc, pour savoir si elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on doit étudier l'intégrabilité de $|f|$. D'abord, si on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par $g(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_{[0,\pi]\times[0,+\infty[}(x,y)$, on a
$$|f(x,y)| = |\sin(x+y)e^{-y}\mathbb{1}_{[0,\pi]\times[0,+\infty[}(x,y)| \leq e^{-y}\mathbb{1}_{[0,\pi]\times[0,+\infty[}(x,y) = g(x,y)$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Or la fonction g est mesurable et positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique, et donc on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{[0,+\infty[}\left(\int_{[0,\pi]} e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) = \pi\left(\int_{[0,+\infty[} e^{-y}\mathrm{d}\lambda(y)\right) = \pi.$$
Cette égalité dit que la fonction g est intégrable. Et donc, par les critères d'intégrabilité, cela implique que la fonction $|f|$ est intégrable.

2. Par la question précèdente, f est intégrable, donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour les fonction intégrables. On a

$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi]\times[0,+\infty[} \sin(x+y)e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{[0,+\infty[}\left(\int_{[0,\pi]} \sin(x+y)e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{-y}\left(\int_{[0,\pi]} \sin(x+y)\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{-y}\left(\int_0^{\pi} \sin(x+y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{-y}(\cos(y)-\cos(\pi+y))\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[0,+\infty[} 2e^{-y}\cos(y)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\int_{[0,n]} e^{-y}\cos(y)\mathrm{d}\lambda(y) = \lim_{n\to+\infty} 2\int_0^n e^{-y}\cos(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

où on peut passer à la limite car $y\mapsto \cos(y)e^{-y}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on peut considérer l'intégrale de Riemann car on intègre une fonction continue sur un compact. Pour finir, en utilisant l'intégration par parties, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^n e^{-y}\cos(y)\mathrm{d}y = [e^{-y}\sin(y)]_0^n + \int_0^n e^{-y}\sin(y)\mathrm{d}y = [e^{-y}\sin(y)]_0^n + ([-e^{-y}\cos(y)]_0^n - \int_0^n e^{-y}\cos(y)\mathrm{d}y)$$

d'où

$$2\int_0^n e^{y}\cos(y)\mathrm{d}y = e^{-n}(\sin(n)-\cos(n))+1.$$

Alors,

$$\int_{[0,\pi]\times[0,+\infty[} \sin(x+y)e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x,y) = \lim_{n\to+\infty}(e^{-n}(\sin(n)-\cos(n))+1) = 1.$$

Exercice 13. (Intégrale sur un triangle). Soit T' le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

1. Dessiner T'.
2. Calculer $\int_{T'} 1\mathrm{d}\lambda(x,y)$. Interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{T'}(x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Correction 13.

1.
2. Par le théorème de Fubini-Tonelli (on intègre une fonction mesurable positive), on a

$$\begin{aligned}\int_{T'} 1\mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{T'}\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{T'}\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{[0,1]}\int_{[0,1-x]} \mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]}(1-x)\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Comme $x\mapsto 1-x$ est continue sur le segment $[0,1]$, les intégrales de Riemann et Lebesgue coincident et on obtient

$$\int_{T'} 1\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On retrouve bien l'aire du triangle T'.

3. L'application $(x,y) \mapsto (x+y)\mathbb{1}_{T'}$ est mesurable positive. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{T'} (x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (x+y)\mathbb{1}_{T'}\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x+y)\mathbb{1}_{T'}\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]}\int_{[0,1-x]} (x+y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Soit $x \in [0,1]$. Comme $y \mapsto x+y$ est continue sur le segment $[0,1-x]$, les intégrales de Riemann et Lebesgue coincident et on obtient

$$\int_{[0,1-x]} (x+y)\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^{1-x} (x+y)\mathrm{d}y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Comme $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, les intégrales de Riemann et Lebesgue coincident et on obtient

$$\int_{T'} (x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Exercice 14. (Changement de variables). On reprend les notations des exercices 4 et 13.
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x,y) = \left(1-x, \frac{y}{2}\right)$.

1. Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme envoyant T sur T'. Expliciter sa réciproque.
2. En utilisant ce changement de variable, vérifier la cohérence de vos calculs des exercice 4 et 13.

Correction 14.

1. L'application ϕ est une application affine de partie linéaire $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui est bien inversible. Donc ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Comme ϕ est affine, elle préserve les droites et donc les triangles. Par conséquent pour montrer que $\phi(T) = T'$ il suffit de montrer que les sommets de T sont envoyés sur les sommets de T'. On a bien $\phi(0,0) = (1,0)$, $\phi(1,0) = (0,0)$ et $\phi(1,2) = (0,1)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\phi^{-1}(x,y) = (1-x, 2y)$ (on aurait aussi pu utiliser cette formule pour justifier que ϕ est bien un difféomorphisme).
2. On applique la formule de changement de variable la la fonction mesurable positive $(x,y) \mapsto x+y$ et au difféomorphisme[1] $\phi : T \to T'$. On obtient alors

$$\int_{T'} (x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_T \left(1-x+\frac{y}{2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_T \frac{1}{2}\mathrm{d}\lambda(x,y) + \frac{1}{4}\int_T (-2x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{12} = \frac{1}{3}.$$

par l'exercice 3. On retrouve bien le résultat de l'exercice 9 !

1. Plus précisément, on ne considère que l'intérieur des triangles T et T', ce que ne change pas les intégrales car les bords des triangles sont des segments et sont donc négligeables dans $\mathbb{R}^2$.