Examen BUT3 : Sujet Blanc, 1h30

I. Fonction à deux variables

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[-8;7] \times [-9;10]$:
$f(x,y) = 2x + y + xy$
On **admet** que la fonction f admet $(-1;-2)$ comme unique point critique.

1. Calculer $f(-1;-2)$
2. Calculer $f(0;0)$
3. Calculer $f(-2;0)$
4. La fonction f admet-elle un maximum ? Un minimum ?

Exercice 2

On étudie la fonction g définie pour x appartenant à $[-5;4]$ et pour y appartenant à $[-6;10]$ par :

$g(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.
   $\frac{\partial g}{\partial x} =$

   $\frac{\partial g}{\partial y} =$

2. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_c, y_c) & = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_c, y_c) & = 0 \end{cases}$$

   Combien de solutions admet ce système d'équations ?

3. Par la suite on choisira UN couple (x_c, y_c) et on travaillera avec lui pour le reste de l'exercice.
   Calculer $g(x_c, y_c)$
   $g(x_c, y_c) =$

4. Développer l'expression littérale $(x+y)^2$
   $(x+y)^2 =$

5. Que peut-on en déduire au sujet de la fonction g ?

6. La fonction g admet-elle un minimum ? Un maximum ?

II. Régression linaire

Exercice 3

On considère la série statistique $(x;y)$ représentée dans le tableau :

x	16	8	7
y	32	18	16
x^2			
y^2			
$x \times y$			
$\hat{y}$			

1. Compléter le tableau en laissant de côté pour le moment la toute dernière ligne.
2. Calculer les moyennes de x, x^2, y, y^2 et $x \times y$.
3. Calculer les variances $var(x)$ et $var(y)$.
4. Calculer les écart-types σ_x et σ_y.
5. Calculer la covariance des séries statistiques suivantes.
6. Calculer le coefficient de correlation linéaire, puis le coefficient de détermination. Commenter votre résultat.
7. Représenter la série statistique par un nuage de points.

8. Calculer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b de la droite qui modélise le mieux la série statistique.
9. Tracer la droite en question.
10. On pose $\hat{y} = ax + b$. Compléter la dernière ligne du tableau.
11. Prédire la valeur $\hat{y}_1$ correspondant à $x_1 = 100$.
12. Prédire la valeur x_2 correspondant à $\hat{y}_2 = 5$

III. Test d'hypothèse

Exercice 4

On souhaite comparer le taux sanguin de créatine chez des veaux de race A et chez des veaux de race B.

On a relevé les données suivantes sur un échantillon de la population totale des veaux A et B. On suppose que les données sont gaussiennes.

Veaux A	Veaux B
4.2	2.8
3.9	2.1
3.7	3
3.5	2.3
4	2.4
	2.7

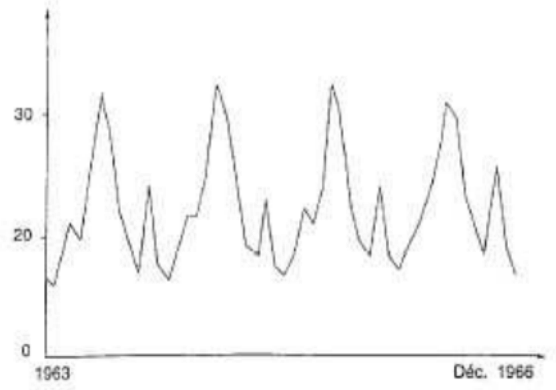
On suppose qu'au niveau de la population totale, les écarts-types σ_A du taux de créatine chez les veaux A et σ_B, chez les veaux B sont égaux.

1. Donner n_A l'effectif de l'échantillon de population des veaux A.
2. Donner n_B l'effectif de l'échantillon de population des veaux B.
3. Donner l'effectif total de l'échantillon. Comparer ce nombre par rapport à 30.
4. Donner la moyenne $\hat{m}_A$ sur les données de l'échantillon des veaux de race A.
5. Donner la moyenne $\hat{m}_B$ sur les données de l'échantillon des veaux de race B.
6. Calculer l'écart-type empirique $\hat{\sigma}_A = \sqrt{\frac{1}{n_A-1}\sum_{i=1}^{n_A}(A_i - \hat{m}_A)^2}$
7. Calculer l'écart-type empirique $\hat{\sigma}_B = \sqrt{\frac{1}{n_B-1}\sum_{i=1}^{n_B}(B_i - \hat{m}_B)^2}$
8. Calculer l'estimateur de l'écart-type $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n_A(\hat{\sigma}_A)^2+n_B(\hat{\sigma}_B)^2}{n_A+n_B-2}}$
9. Calculer $Z = \frac{(\hat{m}_B-\hat{m}_A)}{\hat{\sigma}\times\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}}$
10. Quelle loi suit Z ?
11. Que peut-on conclure des résultats précédents au risque 5% ?
    H_0 :
    H_1 :

IV. Séries chronologiques

Exercice 5

On étudie le trafic en millions de personnes sur les lignes SNCF entre janvier 1963 et décembre 1966 à partir du graphique suivant.



1. Quelle est la quantité étudiée ?
2. Combien y a-t-il de période ? A quoi correspondent-elles ?
3. A votre avis, combien y a-t-il de saison par période ? A quoi correspondent-elles ?
4. Par lecture graphique, déterminer combien de personnes ont pris le train en janvier 1963.
5. Par lecture graphique, déterminer combien de personnes ont pris le train en juillet 1966.
6. A votre avis, à quoi correspondent les maxima locaux de la fonction ?
7. A votre avis, quelle est la tendance globale ?
8. Justifier si on choisit un modèle additif ou multiplicatif pour modéliser les données.
9. Sur votre copie, tracer l'allure de la courbe attendue pour l'année 1967.