Chapitre 3

Exercice 12. (d'après Transmaths 3ème)
Anissa habite Toulouse et sa meilleure amie vient de déménager à Bordeaux. Elles décident de continuer à se voir. Voici les tarifs de train entre les deux villes :
– un aller-retour coûte 80 euros ;
– avec un abonnement annuel à 442 euros, un aller-retour coûte alors moitié prix.
Aider Anissa à choisir la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de voyages.

Soit N le nombre d'aller-retour effectués par Anissa.
- Sans abonnement, elle paierait $80 \times N$ euros.
- Avec abonnement, elle paierait $\underbrace{442}_{\text{abonnement}} + \underbrace{40 \times N}_{\text{moitié prix}}$ euros.

On cherche donc à déterminer quelle formule est plus avantageuse en fonction de N.
Par cela déterminons pour quelles valeurs de N l'option sans abonnement est moins chère : i.e. les N tels que $80N \le 442 + 40N$.

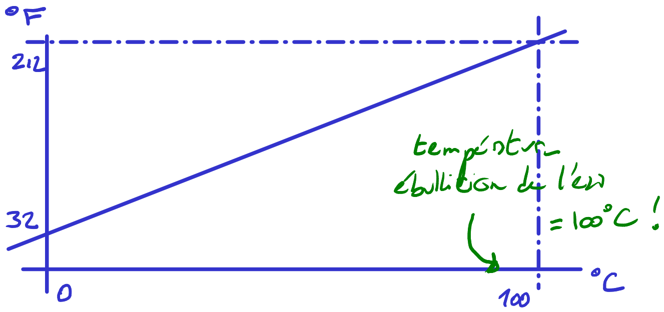
Cette inéquation est équivalente à $\underbrace{80N - 40N}_{=40N} \le 442$ et donc à $N \le \frac{442}{40}$.

Comme $11 < \frac{442}{40} < 12$, on trouve que $\boxed{\text{la formule avec abonnement est plus avantageuse pour un nombre d'aller-retour } N \geq 12.}$

Exercice 13. Conversion
Une température de 32 degrés Fahrenheit correspond à 0 degré Celsius. La température d'ébullition de l'eau est de 212 degrés Fahrenheit. Représenter graphiquement la température en degrés Fahrenheit en fonction de celle en degré Celsius. Cette courbe est-elle linéaire ? Expliquer.

Remarque. On ne peut pas vraiment répondre à cette question, avec les informations de l'énoncé puisque celui-ci ne nous donne que deux points.

Il FAUT savoir en outre que la température en Fahrenheit est affine en celle en Celsius !



Ce n'est pas linéaire mais affine (i.e une droite ne passant pas par 0).

Un voyageur part en Californie pour les vacances. Il consulte la météo locale qui prévoit une température de 54 degrés Fahrenheit à son arrivée. Que doit-il mettre dans sa valise ? Lorsqu'il arrive, la météo affiche 10 degrés de plus que prévu. Quelle a été l'augmentation de température en degrés Celsius ? Commenter.

$t°F = 32 + a \times t°C$ avec a tel que $212 = 32 + a \times 100$ et donc $100a = 212 - 32 = 180$.
Donc on trouve $a = \frac{180}{100} = 1{,}8$.

Pour $54°F$, on cherche une température $t°C$ telle que $54 = 32 + 1{,}8 \times t°C$.
Soit $1{,}8\, t°C = 54 - 32 = 22$ et donc $t°C = \frac{22}{1{,}8} \simeq 12°C$ à $1°C$ près.

La météo actuelle est de $64°F$, on cherche donc l'augmentation en °C. On sait que les variations d'une fonction affine sont proportionnelles, on trouve donc $\frac{10}{1{,}8}$ soit environ $8°C$ à $1°C$.

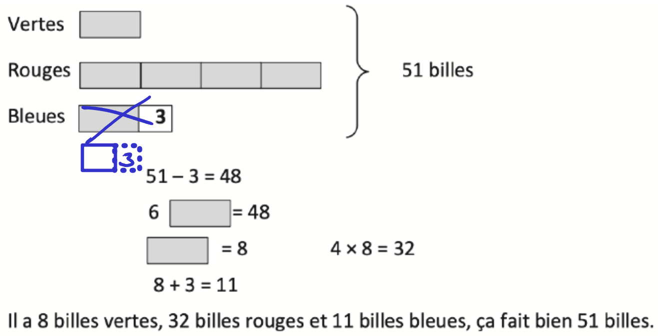
(ou on refait le calcul : $64 = 32 + 1{,}8 \times t_2°C$ soit $t_2°C = \frac{64-32}{1{,}8} = \frac{32}{1{,}8} = \underbrace{\frac{22}{1{,}8}}_{=t°C} + \frac{10}{1{,}8}$.)

Exercice 16. (d'après concours 2022).
Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

> *Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues.*
> *En tout il a 51 billes.*
> *Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?*

D'après un problème du *Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen*, Ministère de l'éducation nationale, 2021

1. Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :
Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.



Il y a 3 billes vertes de plus que de billes bleues mais son dessin suggère le contraire.

2. (a) En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v, le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.

Le nombre de billes :
- rouges est $4 \times v$ et
- bleues est $v - 3$.

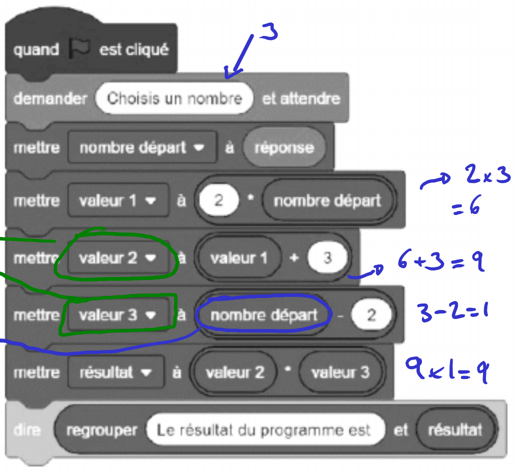
(b) Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé.

Le nombre total de billes étant 51, on trouve : $\underbrace{v}_{\text{vertes}} + \underbrace{4 \times v}_{\text{rouges}} + \underbrace{v-3}_{\text{bleues}} = 51$.

On en déduit $6v - 3 = 51$ soit $6v = 54$
et donc $v = \frac{54}{6} = 9$.

On trouve donc 9 billes vertes, $4 \times 9 = 36$ billes rouges, $9 - 3 = 6$ billes bleues (soit 51 billes ✓).

Exercice 17. (d'après concours 2022).
1. Adam a réalisé le programme ci- contre à l'aide du logiciel Scratch.
(a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat est égal à 9. ✓
(b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 2,4 ?



3
valeur 2 = 9
valeur 3 = 1
① = 3 !
→ $2 \times 3 = 6$
$6 + 3 = 9$
$3 - 2 = 1$
$9 \times 1 = 9$
↳ 9.

valeur 1 : $2 \times 2{,}4 = 4{,}8$
valeur 2 : $4{,}8 + 3 = 7{,}8$
valeur 3 : $2{,}4 - 2 = 0{,}4$
résultat $= 7{,}8 \times 0{,}4 = 3{,}12$.

(c) Soit x le nombre de départ. Montrer que le programme d'Adam retourne le nombre $2x^2 - x - 6$.

on obtient valeur 1 : $2x$ et valeur 2 : $2x + 3$.
et valeur 3 : $x - 2$.
Soit résultat $= (2x+3) \times (x-2)$. On développe :
$2x \times (x-2) + 3 \times (x-2) = \underbrace{2x \times x}_{2x^2} - \underbrace{2x \times 2}_{-4x} + \underbrace{3 \times x}_{+3x} - \underbrace{3 \times 2}_{-6} = 2x^2 - x - 6$.

2. Pauline propose le programme de calcul suivant.

> *Choisis un nombre.*
> *Élève-le au carré*
> *Soustrais 3.*
> *Multiplie par 2.*
> *Soustrais le nombre de départ.*

(a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat obtenu est égal à 9.
(b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 7/3 ?

$3 \to 3^2 = 9 \to 9 - 3 = 6 \to 6 \times 2 = 12 \to 12 - 3 = 9$ ✓

$\frac{7}{3} \to \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} \to \frac{49}{9} - 3 = \frac{49}{9} - \frac{27}{9} = \frac{22}{9} \to \frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$
$\frac{44}{9} - \frac{7}{3} = \frac{44}{9} - \frac{21}{9} = \frac{23}{9}$. ✓

3. Montrer que, pour un même nombre de départ, les programmes de calcul d'Adam et Pauline donnent le même résultat.

On démarre avec x : et on obtient : soit $2(x^2-3)-x$.

$\hookrightarrow x$
$\hookrightarrow x^2$
$\hookrightarrow x^2-3$
$\hookrightarrow 2\times(x^2-3)$
$\hookrightarrow 2(x^2-3)-x$

Choisis un nombre.
Élève-le au carré
Soustrais 3.
Multiplie par 2.
Soustrais le nombre de départ.

On développe : $2x^2-6-x$ ou encore, $2x^2-x-6$ comme précédemment !

4. Déterminer le ou les nombres de départ possibles pour que les résultats des programmes de calcul soient nuls. Justifier.

On cherche x tel que ces formules donnent 0. On repart de la première car : $(2x+3)\times(x-2)=0$ si et seulement si $2x+3=0$ ou $x-2=0$.
On trouve donc 2 solutions : $x=-\frac{3}{2}$ (dans ce cas $2x+3 = 2\times(-\frac{3}{2})+3 = -3+3=0$) et $x=2$ (dans ce cas $x-2=0$).

5. Adam souhaite automatiser les calculs de son programme pour les entiers naturels. Il utilise un tableur dont la copie d'écran est donnée ci-dessous. Quelle formule doit-il saisir dans la case B2 pour qu'il puisse l'étirer vers le bas sur l'ensemble de la colonne ?

B2 :

multiplication

$= 2 * \underbrace{A2 * A2}_{(A2)^2} - A2 - 6$.

ne pas oublier !

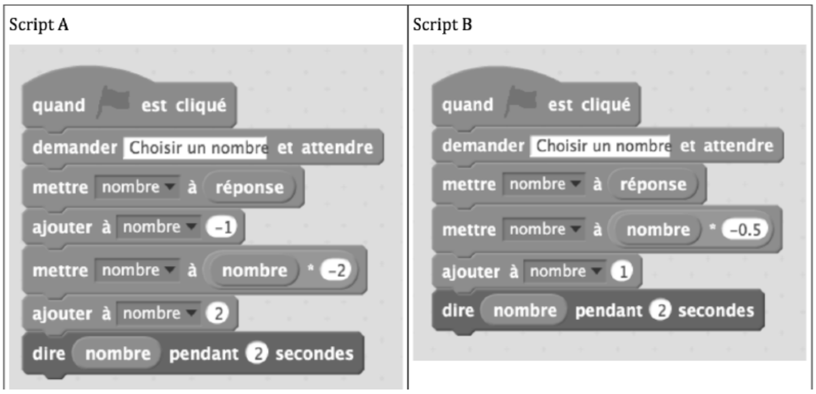
A2 joue le rôle de x, on a bien $2x^2-x-6$ ✓.

	A	B
1	Nombre de départ	Résultat du programme
2	1	-5
3	2	0
4	3	9
5	4	22
6	5	39

Exercice 18. (d'après concours 2021).
Voici deux scripts :

1
1
$1-1=0$
$0\times(-2)=0$
$0+2=2$

2
1
-2
0



2
-1
0

1
1
$1\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

1. Quel résultat obtient-on si on applique chacun des deux scripts au nombre 1 ?

On démarre avec 1 et on suit les programmes, on obtient 2 avec le script A et $\frac{3}{2}=1{,}5$ avec le B.

2. Quels nombres faut-il saisir avec chacun des deux scripts pour obtenir le même résultat 0 ?

On suppose que l'on a 0 à la fin et on remonte, on trouve que l'on a dû démarrer le script A avec 2 et le script B aussi.

3. Pour un même nombre de départ, trouver la relation qui existe entre le résultat du script A et celui du script B. Justifier.

Script A : $x \rightsquigarrow x-1 \rightsquigarrow -2(x-1) \rightsquigarrow -2(x-1)+2 = -2x+4$.
Script B : $x \rightsquigarrow x\times(-\frac{1}{2}) \rightsquigarrow x\times(-\frac{1}{2})+1 = -\frac{1}{2}x+1$.

Comme $4\times(-\frac{1}{2}x+1) = -2x+4$, le script A donne 4 fois le script B.