Exercice 1. [Questions de cours] (6pts)

1. Non. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ mais la série Bertrand $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ n'est pas convergente.
2. Oui. Par la condition nécessaire de la convergence $|u_n| \to 0$. Donc, pour n assez grand, $(u_n)^2 \leq |u_n|$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)^2$ est convergente par le principe de comparaison.
3. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^n}$ à termes positifs converge par le critère de Cauchy:
$$\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(n^{\sqrt{n}-\frac{1}{2}n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right)} \to 0.$$
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+\sin n}{n+\cos n}$ ne converge pas car
$$\left|(-1)^n \frac{n+\sin n}{n+\cos n}\right| = \frac{n+\sin n}{n+\cos n} \to 1 \neq 0.$$
4. On utilise l'encadrement du reste pour les séries de terme général $u_n = f(n)$ où $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et décroissante vers 0. Dans notre cas, $f(x) = \frac{1}{x^4}$. Il suffit de trouver n tel que
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3n^3} < 10^{-3}.$$
Par exemple, $n = 10$ suffira.

Exercice 2. [Séries numeriques] (5pts)

1. On considère $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n}$,
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2n+1}\sqrt{n}}{(n+(-1)^n\sqrt{n})n} \sim \frac{-\sqrt{n}}{n^2} = \frac{-1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Alors, $\sum |v_n|$ converge. Par conséquence, $\sum u_n$ converge aussi puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente par le critère de convergence pour les séries alternées.
La méthode DL:
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1+o(1)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Le série $\sum u_n$ est convergente car $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{1+o(1)}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergent.
2. La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est télescopique car
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
est $\sum_{n\geq 2} u_n = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3. [Convergence simple et uniforme](5pts)

1. Oui. Pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$.

2. Non. Soit $x_n = n$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\ln 2 = +\infty.$$

3. On calcule la dérivé $\left(x - n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)' = 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction auxiliaire est croissante.

4. Oui. Par croissance de la fonction auxiliaire et DL d'ordre 1 de $\ln(1+x)$ en 0,

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - x| \leq 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

Exercice 4. [Intégration](6pts)

1. Les fonctions f_n sont continues car elles sont linéaires par morceaux.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$. Si $x > 0$, alors pour tout $n > \frac{1}{x}$, $f_n(x) = 0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. La fonction limite f est une fonction nulle.

3. Non. $\|f - f_n\| = |f_n(\frac{1}{2n})| = \frac{n}{2} \not\to 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{4}$. $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = 0$. Les hypothèses du Thm 3 demandent que la convergence soit uniforme. Le Thm 3 n'est donc pas vrai sans l'hypothèse de la convergence uniforme.